

パーティクルフィルタを用いる状態フィードバック制御

正員 西田 健*

State Feedback Control using Particle Filter

Takeshi Nishida*, Member

(2012年11月16日受付, 2013年2月15日再受付)

Since the particle filter is able to apply to non-Gaussian and nonlinear system models, it is capable of wide application than the Kalman filters. In this paper, a construction method of a state feedback control system using the particle filter as an observer for a probabilistic state estimation is described. In order to be robust to non-Gaussian noise, maximum a posteriori probability estimation extraction method and evaluation method of the effective sample size have been incorporated in the particle filter. Then, effectiveness of the constructed system is verified experimentally, and the effectiveness of the state observer constructed by the particle filter is indicated by comparison with the Kalman filter.

キーワード: 状態推定, 粒子フィルタ, カルマンフィルタ, オブザーバ, 状態フィードバック制御系

Keywords: state estimation, particle filter, Kalman filter, observer, state feedback control system

1. はじめに

状態フィードバック制御系における確率的ノイズを陽に取り扱う状態推定手法として、従来よりカルマンフィルタ (KF: Kalman filter) や拡張カルマンフィルタ (EKF: extended KF), 無香カルマンフィルタ (UKF: unscented KF) などが広く用いられている。しかし、これら一連の KF は確率的ノイズのガウス性を前提とするため、非ガウス性の確率的ノイズが混入する場合には適切な状態推定が行われない。一方で、粒子フィルタ (PF: particle filter) は非線形・非ガウスモデルに適用可能であり、KF よりも多様な系の状態推定が可能であることから、近年、多くの分野に応用されている⁽¹⁾⁽²⁾。典型例として、屋外移動ロボットの状態量推定と自動地図を同時に行う SLAM (simultaneous localization and mapping) 問題への適用研究では、数多くの成果が報告されている⁽³⁾⁽⁴⁾。しかし、PF を利用する多くの先行研究は対象追跡系やユーザインタフェースなどの高レベル制御系[†]を対象としており、モータ制御系などの低レベル制御系^{††}への利用の報告は少ない⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾。

一般に、PF による事後推定から唯一の推定値 (特性値と

も呼ばれる) を抽出するには、最小分散推定 (MMSE: minimum mean square estimation) もしくは MAP (maximum a posteriori) 推定が用いられる。前者は粒子の重み付き平均値として容易に算出できるため、特性値として多くの研究で利用されているが、推定が非ガウス分布となる場合には、これは適切な特性値とならない⁽⁸⁾。実際的な応用において事後確率分布が多峰性となる場合は多く存在するが、そのような場合に MMSE は事後確率密度の非常に小さな値を持つ領域、すなわち峰と峰の間の谷の部分に算出される。一方、後者は導出のための計算量は増加するものの、非ガウス分布に対して精度の高い特性値を与える⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾。PF を低レベル制御系の状態推定に利用するいずれの先行研究⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾においても、フィードバックに必要な決定論的な唯一の状態を事後推定から抽出する手法として MMSE を利用するため、多峰性確率分布を近似可能であるという PF の最大の特徴を反映した手法とはなっておらず、KF に対する優位性を認めるには至っていない。

そこで本論文では、多峰性の確率的ノイズを伴う低レベル制御系のオブザーバとして PF を利用する手法を提案する。本手法は、PF によって推定された多峰性確率分布の MAP 推定手法として pf-MAP⁽⁸⁾を導入することで、より精度の高い推定を実現する。さらに、リサンプリングの頻

*九州工業大学
〒804-8550 福岡県北九州市戸畑区仙水町 1-1
Kyushu Institute of Technology
1-1, Sensui, Tobata-ku, Kitakyushu, Fukuoka 804-8550,
Japan

[†] 実世界の物理量に対する抽象度が高い制御系。

^{††} 実世界の物理量に対する抽象度が、高レベル制御系に比べて低い制御系。

度を調整するための ESS 法⁽¹¹⁾を導入し、観測ノイズの分散を考慮した粒子の適切な分布を実現する。また、KF では適切な推定が困難な多峰性の確率的ノイズが混入する系において、本手法を用いる状態フィードバックによってシステムの安定化が達成できることをシミュレーションにより示す。さらに、PF の粒子数と計算量、推定精度の関係や導入する pf-MAP と ESS 法の効果について、シミュレーションによる検証を行う。

本論文の構成は次の通りである。まず、2 節において本論文で提案する PF のアルゴリズムの処理手順を示し、3 節において、状態フィードバック制御系に PF を組み込む際の制御系の構成方法を示す。さらに、4 節において数値シミュレーションにより提案手法の有効性を KF との比較によって評価する。そして最後に 5 節において本論文の結論を述べる。

2. PF の事後確率からの特性値の抽出

(2.1) パーティクルフィルタ 以下では離散時刻を $k = 1, 2, \dots$ で表す。対象はマルコフ性を有する離散時間システムであり、その時間遷移は次の一般状態空間モデルによって表されるとする。

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_k) \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\zeta}_k) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 \mathbf{x}_k は状態、 \mathbf{y}_k は観測、 \mathbf{u}_k は入力、 $\boldsymbol{\xi}_k$ はシステムノイズ、 $\boldsymbol{\zeta}_k$ は観測ノイズ、 $\mathbf{f}_k(\cdot)$ と $\mathbf{h}_k(\cdot)$ は非線形関数である。

PF は、状態 \mathbf{x}_k を M 個の重み付けされた粒子の集合 $\{(\mathbf{x}_k^{(m)}, \pi_k^{(m)})\}_{m=1}^M$ を用いて表現するために、各時刻における粒子集合を Algorithm 1 によって更新する。ここで、

$\mathbf{x}_k^{(m)}$ は状態空間中の仮説を表す粒子、 $\pi_k^{(m)} \geq 0$ は粒子の重みである。4 行目の $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^{(m)})$ は各粒子の尤度である。7 行目で求める $\mathbf{x}_k^{\text{MAP}}$ は最大事後確率であり、状態フィードバック制御に利用される状態ベクトルとなる。リサンプリングを行うかどうかの判断は、各粒子の重みの均等の場合、すなわち 8 行目で求める有効サンプルサイズ (ESS: effective sample size)⁽¹¹⁾ の値を利用する。これは全粒子の重みが均等である場合に $ESS = M$ となり、重みの偏りが最も大きい場合に $ESS = 1$ となる。適当なしきい値 ESS_{th} を設け、 ESS の値がそれを下回ればリサンプリングが必要であると判断する。この値は有効に活用されている粒子の数に関する指標を与え、リサンプリングの頻発を抑制するために導入する。例えば、多峰性の確率的ノイズに対してリサンプリングが頻発すると、峰の高い箇所だけに粒子が密集する場合があるが、ESS 法によってリサンプリングの発生頻度を適切に抑えることで、より広範に粒子を配置できるようになる。

(2.2) 一般非線形動的システムの MAP 推定 閉ループを有する制御系を駆動するためには、PF によって状態のすべての事後分布を得る事よりも、フィードバックに必要な決定論的な唯一の状態 (特性値) を得ることが望まれる。例えば、特性値を MMSE とする場合には次のように算出する。

$$\mathbf{x}_k^{\text{MMSE}} = \sum_{i=0}^M \pi_k^{(m)} \mathbf{x}_k^{(m)} \dots\dots\dots (3)$$

これは計算量が少ないため、多くの研究で利用される。

一方、次のように事後確率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:n})$ を最大化する \mathbf{x}_k を MAP 推定と呼ぶ。

$$\mathbf{x}_{k|n}^{\text{MAP}} = \underset{\mathbf{x}_k}{\text{argmax}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:n}) \dots\dots\dots (4)$$

特に $k = n$ の場合はフィルタ MAP 推定、 $k < n$ の場合は平滑化周辺 MAP 推定と呼ばれる[†]。MAP 推定には解析的に容易ではない事後確率の最大化が必要であるため、単に最大重みを持つ粒子が MAP 推定として利用されることも多い^{(12)~(14)}。しかし近年、最大重みを有する粒子は必ずしも妥当な MAP 推定とならないことが示されている^{(8)~(15)}。これに対し、PF の事後確率からオンラインで MAP 推定を行うための手法として、高精度 MAP 推定手法⁽¹⁶⁾や EP-VGM (end point Viterbi-Godsill MAP) 推定手法⁽⁹⁾、pf-MAP⁽⁸⁾ 推定手法などが提案されている。高精度 MAP 推定手法は調整パラメータと計算量が実用を妨げる程度に多いという問題が指摘されている⁽¹⁰⁾。また、EP-VGM 推定と pf-MAP 推定は、精度と計算量の両面で後者が優位であることが比較実験によって示されている⁽¹⁰⁾。そこで本論文では、次のように算出される pf-MAP により PF の特性値を抽出する (導出は付録 1 参照)。

Algorithm 1 Particle Filter

```

1: loop
2:   for  $m := 1$  to  $M$  do
3:      $\tilde{\mathbf{x}}_k^{(m)} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(m)}, \mathbf{u}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_k)$  //Sampling step
4:      $\tilde{\pi}_k^{(m)} = \pi_{k-1}^{(m)} \cdot p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^{(m)})$  //Likelihood evaluation step
5:   end for
6:    $\hat{\pi}_k^{(m)} := \tilde{\pi}_k^{(m)} / \sum_{i=1}^M \tilde{\pi}_k^{(i)}$ 
7:   calculation of  $\mathbf{x}_k^{\text{MAP}}$ 
8:    $ESS = 1 / \sum_{i=1}^M (\hat{\pi}_k^{(i)})^2$  //calculation of ESS
9:   for  $m := 1$  to  $M$  do
10:    if  $ESS < ESS_{\text{th}}$  then
11:       $\mathbf{x}_k^{(m)} \sim \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_k^{(1)} & \text{with prob. } \hat{\pi}_k^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_k^{(M)} & \text{with prob. } \hat{\pi}_k^{(M)} \end{cases}$  //Resampling step
12:       $\pi_k^{(m)} := 1/M$ 
13:    else
14:       $\mathbf{x}_k^{(m)} := \tilde{\mathbf{x}}_k^{(m)}$ 
15:       $\pi_k^{(m)} := \hat{\pi}_k^{(m)}$ 
16:    end if
17:  end for
18:   $k := k + 1$ 
19: end loop

```

[†] 本論文では、フィルタ MAP 推定と MAP 推定を同義として扱う。

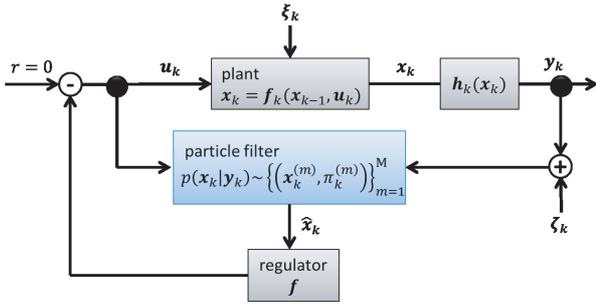


Fig. 1. A state feedback control system including the particle filter state observer.

$$\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = \underset{\mathbf{x}_k^{(m)}}{\operatorname{argmax}} p\left(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(m)}\right) \sum_{i=0}^M p\left(\mathbf{x}_k^{(m)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}\right) \pi_{k-1}^{(m)} \dots \dots \dots (5)$$

この手法を通じて得られる近似的な MAP 推定は真の MAP に収束することが示されている⁽¹⁰⁾。

3. 状態フィードバック制御系の構成

PF を状態フィードバック制御系のオブザーバとして利用し、Fig.1 に示すようなレギュレータ・オブザーバ併合系を構成する。対象は次のようなシステムモデルと観測モデルで表されるとする。

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \boldsymbol{\xi}_k \dots \dots \dots (6)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\zeta}_k \dots \dots \dots (7)$$

ここでは目標値を $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ とし、初期外乱 \mathbf{x}_0 を迅速に目標値に収束させることを制御目的とする。また、全状態量 \mathbf{x}_k を直接計測できないものとし、計測 \mathbf{y}_k とシステムモデルおよび観測モデルを用いて状態量推定を行う。さらに、ここでは観測に多峰性の確率密度を有するノイズが混入するとする。

このような制御系のオブザーバとして PF を利用すると、最大事後確率として推定された状態量 $\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = \hat{\mathbf{x}}_k$ を利用することで、次のような状態フィードバック制御が行われる。

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{f}^T \hat{\mathbf{x}}_k \dots \dots \dots (8)$$

粒子群から各時刻における最適な粒子が選択された結果が pf-MAP 推定となるので、Luenberger オブザーバにおけるオブザーバゲインに相当するような推定誤差の収束を調整するためのパラメータは、PF には存在しない。したがって、状態フィードバックゲイン \mathbf{f} は、オブザーバの推定の収束速度を考慮することなく、系を漸近安定化させるように設定すれば良い。

4. シミュレーション

〈4・1〉 自由系の状態推定 ここでは次のような自由系を用いて、KF と PF による状態推定について検証する。

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} \xi_{1k} \\ \xi_{2k} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (9)$$

$$y_k = [1 \ 0] \mathbf{x}_k + \zeta_k \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $\mathbf{x}_k \triangleq [x_k \ v_k]^T$ であり、 x_k はターゲットの位置、 v_k はターゲットの速度、 Δ はサンプリング周期を表す。以下のシミュレーションでは、すべて $\Delta = 1$ とした。また、システムノイズは次のようなガウス分布に従って発生させる。

$$\xi_{1k}, \xi_{2k} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2) \dots \dots \dots (11)$$

以下のシミュレーションでは $\sigma_s^2 = 0.05$ とした。観測ノイズ ζ_k は、その性質によって KF と PF による推定に影響を与えるので、以下ではガウス分布に従うノイズが混入する場合と多峰性確率密度関数に従うノイズが混入する場合について検証した。

〈4・1・1〉 1 つの観測を利用する場合 まず、観測ノイズが以下のようにガウス分布に従う場合について、KF と PF による状態推定について検証する。

$$\zeta_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_o^2) \dots \dots \dots (12)$$

ここで、 $\sigma_o^2 = 0.05$ とした。

PF による状態推定は次のように得られる。

$$\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = [x_k^{\text{MAP}} \ v_k^{\text{MAP}}]^T \dots \dots \dots (13)$$

$$x_k^{\text{MAP}} = \underset{x_k^{(m)}}{\operatorname{argmax}} p\left(y_k | x_k^{(m)}\right) \sum_{i=1}^M p\left(x_k^{(m)} | x_{k-1}^{(i)}\right) \pi_{k-1}^{(m)} \dots \dots \dots (14)$$

$$p\left(y_k | x_k^{(m)}\right) \propto \exp\left\{-\frac{\left(x_k^{(m)} - y_k\right)^2}{2\sigma_o^2}\right\} \dots \dots (15)$$

$$p\left(x_k^{(m)} | x_{k-1}^{(i)}\right) \propto \exp\left\{-\frac{\left\|\mathbf{x}_k^{(m)} - \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}\right\|^2}{2\sigma_o^2}\right\} \dots \dots \dots (16)$$

ここで、式(15)と(16)の計算結果は最大値の検索のために利用されるので、すべての m について共通する比例の定数成分は除いて計算することに注意されたい。また、 x_k^{MAP} を有するとして選択された粒子に付随する速度成分が v_k^{MAP} として採用される。

シミュレーション条件は以下のように定めた。まず、KF の初期における誤差行列、残差の共分散行列は σ_s と σ_o を用いて設定した。また、KF の推定の初期値は $\mathbf{0}$ とした。PF の粒子数は 1000 とし、各粒子は初期値として一定の範囲に分布させるために $x_0^{(m)} \in [-3, 3]$ の一様乱数を与え、速度は無いものとして $v_0^{(m)} = 0$ を与えた。また初期の重みは $\pi_0^{(m)} = 1/M (\forall m)$ とした。再初期化のための ESS のしきい値は、観測ノイズが発生する範囲に粒子を十分に分布させることができるよう、経験的に $ESS_{\text{th}} = 15$ と定

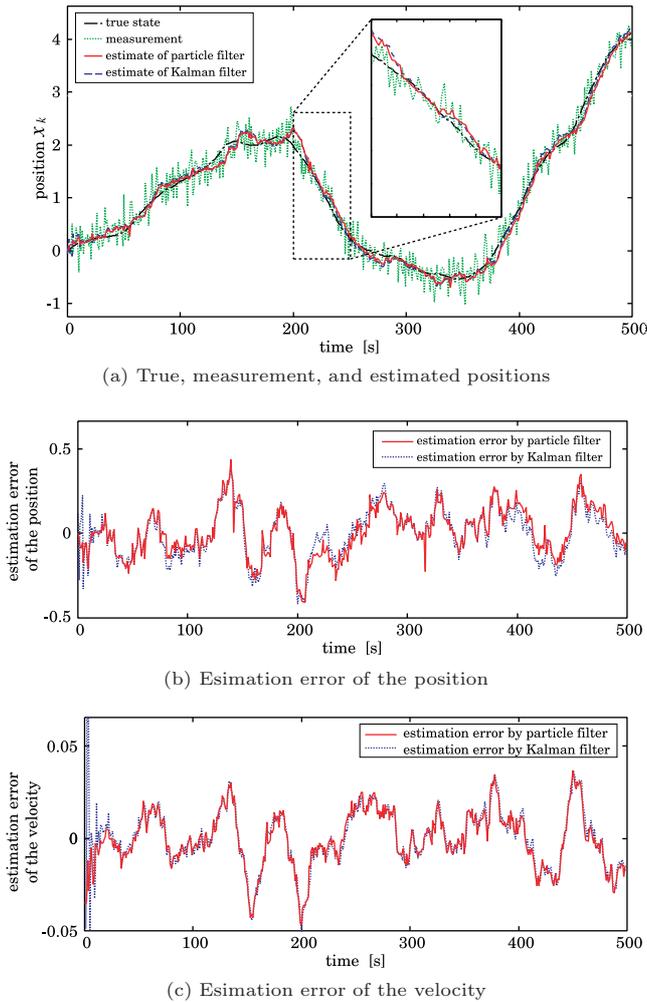


Fig. 2. Time evolution of the estimation. The probability distribution of the measurement noise follows a Gaussian distribution.

Table 1. MSE of the estimated state values by Kalman and particle filters.

filter	MSE of position	MSE of velocity
Kalman filter	0.089369	0.011904
particle filter	0.081069	0.011333

めた。

以上の条件の元で、KF および PF に関する上述の計算に従い位置と速度を推定するシミュレーションを行った結果として得られた状態推定の時間推移を Fig. 2 に示す。この図より、推定状態の推移 (同図 (a)) や推定誤差の推移 (同図 (b) と (c)) は、KF と PF ではほぼ同様であることが分かる。また Table 1 より、PF による MSE (meansquared error) の値は KF のそれよりも低く、PF による推定が KF の推定よりも精度が高いことがわかる。さらに、初期の 10 ステップ前後までの推定において、PF による推定が速く収束していることが読み取れる。

〈4・1・2〉 2つの観測を利用する場合 次に、以下の問題設定を想定して、互いに独立な2つの観測信号を用いるシミュレーションを行う。

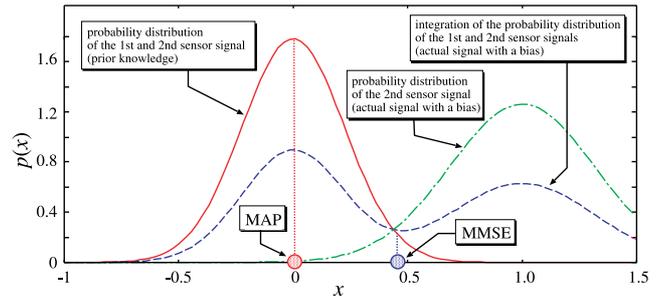


Fig. 3. State estimation in the case where the measurement noise according to two Gaussian distributions.

- (1) 耐故障性と観測精度の向上のために2つのセンサが設けられている。オブザーバはそれらの冗長なセンサの観測を利用して状態推定を行う。
- (2) 事前の目論みでは、両方のセンサの計測性能は同等である。オブザーバはこの事前知識を基に設計される。
- (3) 実際には、第2センサにバイアスと事前知識よりも大きな分散を有するノイズが混入する。

2つのセンサにバイアスの無い同様の確率分布を有するノイズが混入するという事前知識に基づけば、2つのセンサによる観測を統合することで確率分布の分散を減少させ、観測の確度を高くできることが見込まれる。しかし、一方のセンサ信号に予期せぬバイアスと大きな分散が生じると、2つのセンサ信号を統合した場合の確率密度は多峰性となり、確率値も低下する。このような観測ノイズの合成の概念は Fig. 3 のように表すことができる。

以上の設定をシミュレートするために、前述のシミュレーションにおける式 (10) とは異なる観測モデルを与える。すなわち、同等の2つのセンサにより観測が行われ、それらの信号には同じ確率分布を持つノイズが混入するという事前知識が与えられているとする。この事前知識に基づいて、以下のように2本の観測モデルが与えられる。

$$y_{1k} = [1 \ 0]x_k + \zeta_{1k}, \quad \zeta_{1k} \sim \mathcal{N}(b_1, \sigma_{1o}^2) \cdots \cdots (17)$$

$$y_{2k} = [1 \ 0]x_k + \zeta_{2k}, \quad \zeta_{2k} \sim \mathcal{N}(b_2, \sigma_{2o}^2) \cdots \cdots (18)$$

ここで、KF および PF が利用する事前知識は、

$$\sigma_{1o}^2 = \sigma_{2o}^2 = 0.05, \quad b_1 = b_2 = 0 \cdots \cdots (19)$$

である。しかしシミュレーションでは、以下のように第1センサとは異なるバイアスと分散を持つ確率的ノイズを第2センサの観測に混入させる。

$$b_2 = 1.0, \quad \sigma_{2o}^2 = 0.1 \cdots \cdots (20)$$

次に、1 サンプル時刻に2つの観測信号を用いるためのKF と PF の処理手順を示す。まず、2つの観測に基づくKF の推定は、(1) 予測 → (2) y_{1k} を用いて更新 → (3) 予測 → (4) y_{2k} を用いて更新 → (5) 推定状態 \hat{x}_k の出力、

という手順で行う[†]。一方 PF は, Algorithm 1 の 4 行目における尤度計算を次のように行うことで, 2 種類の観測を統合することができる。

$$p(y_{1k}, y_{2k} | x_k^{(m)}) \propto \exp\left\{-\frac{(x_k^{(m)} - y_{1k})^2}{2\sigma_o^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x_k^{(m)} - y_{2k})^2}{2\sigma_o^2}\right\} \dots\dots\dots (21)$$

これを用いて, 次のように pf-MAP 推定を行う。

$$x_k^{MAP} = \underset{x_k^{(m)}}{\operatorname{argmax}} p(y_{1k}, y_{2k} | x_k^{(m)}) \cdot \sum_{i=1}^M p(x_k^{(m)} | x_{k-1}^{(i)}) \pi_{k-1}^{(m)} \dots\dots\dots (22)$$

ここで, $p(x_k^{(m)} | x_{k-1}^{(i)})$ の算出は式 (16) と同様に行う。
 以上の条件と手順に従って KF と PF による状態推定を行った結果を Fig. 4 に示す。同図 (a) より, 第 2 センサにはバイアスと大きな分散のノイズが加わっており, KF の推定はその影響を受けて, 真の状態に対してバイアスが生じていることがわかる。一方, PF の推定は, 前述のシミュレーションと同様に精度良く行われたことが分かる。また, 各状態の推定誤差を拡大して示した同図 (b) および同図 (c) より, KF による位置の推定にはバイアスが発生していることや, 速度に関する推定精度は KF と PF で同程度であることがわかる。これらの結果は, KF が多峰性確率密度関数の中央値を推定する性質があることや, PF が多峰性確率密度関数の最尤値を適切に抽出していることを示している。

〈4・2〉 状態フィードバック制御による安定化 次のような状態フィードバック制御系を構成し, KF と PF をオブザーバとして利用する場合の制御性能を検証する。

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta^2}{2} \\ \Delta \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} \xi_{1k} \\ \xi_{2k} \end{bmatrix} \dots (23)$$

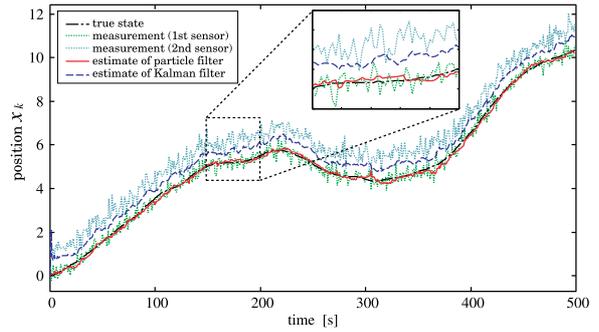
$$y_{1k} = [1 \ 0] \mathbf{x}_k + \zeta_{1k} \dots\dots\dots (24)$$

$$y_{2k} = [1 \ 0] \mathbf{x}_k + \zeta_{2k} \dots\dots\dots (25)$$

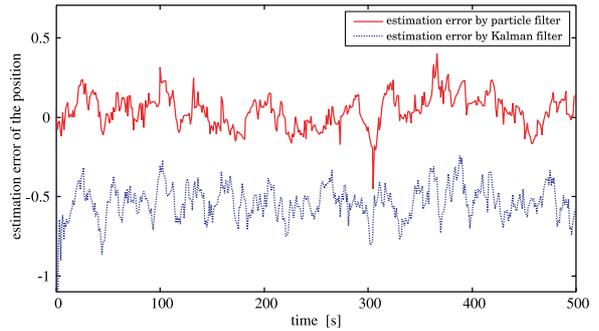
$$u_k = -\mathbf{f}^T \hat{\mathbf{x}}_k \dots\dots\dots (26)$$

ここで, $\hat{\mathbf{x}}_k$ は KF もしくは PF による推定状態ベクトルを表す。また各種条件は, 前述のシミュレーションと同様である。

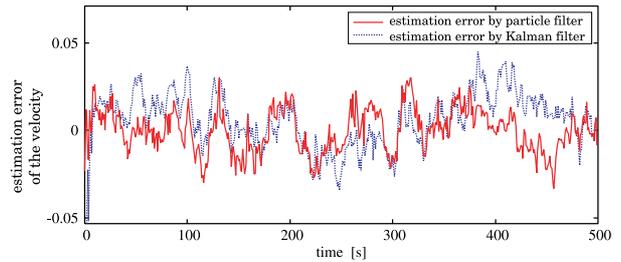
〈4・2・1〉 1つの観測を利用する場合 まず, 1つの観測を利用する場合について制御性能を検証するために, 観測モデルは式 (24) のみであるとした。すなわち, 観測には単峰のガウス性ノイズが混入する。状態フィードバック制



(a) True, measurement, and estimated positions



(b) Estimation error of the position ($x_k - \hat{x}_k$)



(c) Estimation error of the velocity ($v_k - \hat{v}_k$)

Fig. 4. Time evolution of the estimation. The probability distribution of the measurement noise follows two Gaussian distribution.

御系の極を $[0.8, 0.8]$ および $[0.5, 0.5]$ に配置した場合の出力と制御入力の時間推移を Fig. 5 に示す。まず, 同図 (a) および (c) より, PF と KF による状態推定とそれを用いた制御結果は, ほぼ同等であることがわかる。ただし, 同図 (b) および (d) の制御入力の時間推移より, PF を利用する制御系の入力の変動は KF のそれよりも比較的大きくなっており, PF の推定は KF の推定よりも極配置に依らず観測ノイズに対して若干敏感であることがわかる。

〈4・2・2〉 2つの観測を利用する場合 次に, 多峰性確率密度を有する観測ノイズが混入する場合の制御性能を検証するために, 観測モデルとして式 (24) および式 (25) を用いる。また, 各種条件は〈4・1・2〉に示したものと同様とする。状態フィードバック制御系の極を $[0.7, 0.7]$ に配置した場合の制御入力と出力の時間推移を Fig. 6 に示す。まず同図 (a) の結果より, KF の推定に基づく制御結果には定常偏差が生じていることがわかる。これは, 第 2 センサの観測ノイズにバイアスがあるために, 前述のシミュレーション結果と同様に KF の推定が 2 つの観測の中間の値に収束

[†] y_{1k} と y_{2k} の参照順を逆にしても, KF の推定には影響しない。

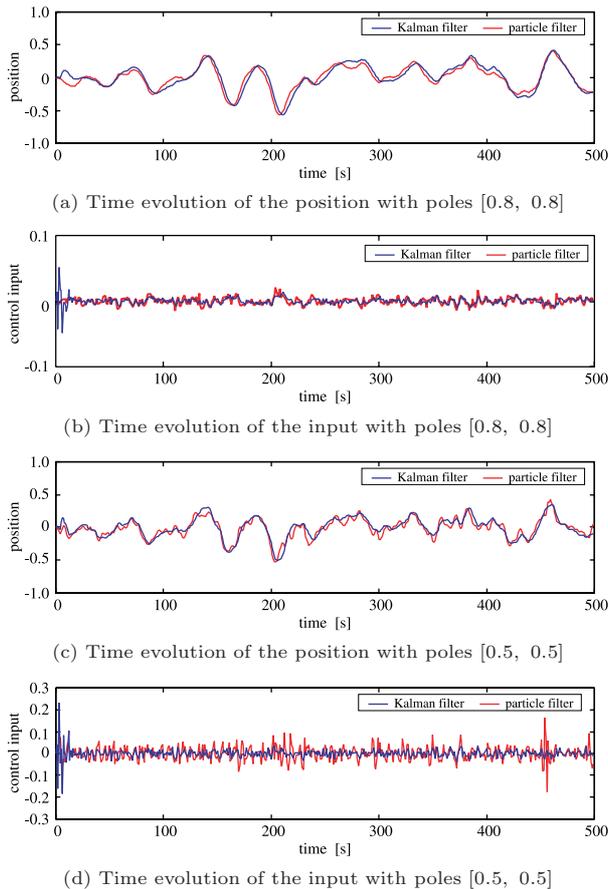


Fig. 5. Time evolution of a state feedback control. The probability distribution of the measurement noise follows a Gaussian distribution.

したことが原因である。一方で同図 (b) の結果より、PF の推定に基づく制御結果には定常偏差が発生しておらず、概ね良好な制御が行われたことがわかる。これは、PF による状態推定が、分散の小さな第 1 センサの観測に基づいて行われたことによる。さらに同図 (c) より、KF を用いる制御系では初期の数ステップにおいて大きな制御入力が必要とされているが、その後の時間推移には PF とほぼ同様であることがわかる。

以上より、多峰性の確率的ノイズを伴う制御系において、提案手法による状態推定が KF によるそれよりも状態フィードバック制御に有効であることが示された。

〈4・3〉 PF の計算手法 本論文では PF の計算手順に、ESS 法に基づくリサンプリング実行の判断や、pf-MAP 推定による最大事後確率推定手法を導入した。これらの推定精度の向上に貢献する度合いを調べるために、次のようなシミュレーションを行った。すなわち、〈4・2・2〉に示したシミュレーションの条件に基づき、pf-MAP 推定や ESS 法を利用しない場合の PF の推定精度を調べた。結果を Table 2 に示す。表中に示した条件はそれぞれ、「nomal」は上述のシミュレーションと同様の条件、「without ESS」は ESS 法を用いずにリサンプリングを毎ステップ行うという条件、「MMSE」は事後確率を式 (3) によって導出するという条

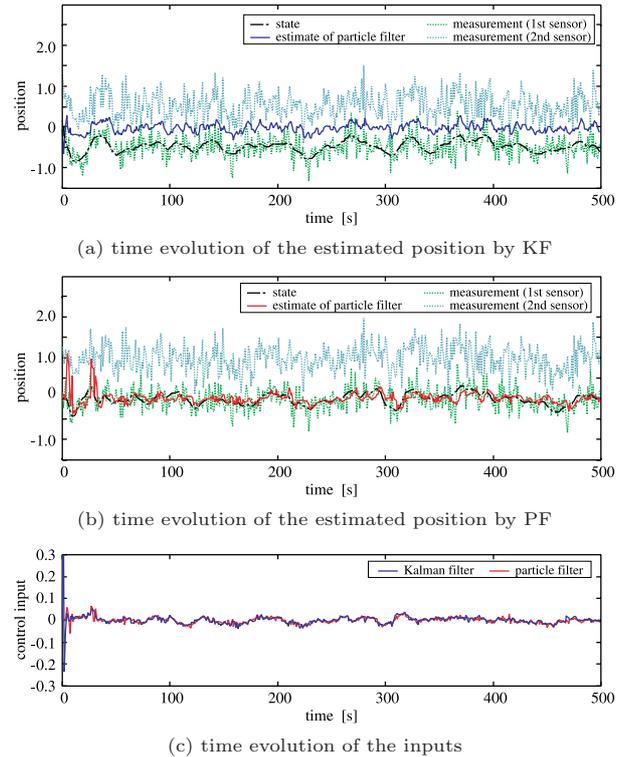


Fig. 6. Time evolution of a state feedback control with the poles $[0.7, 0.7]$. The probability distribution of the measurement noise follows two Gaussian distribution.

Table 2. Relations between calculation time, estimation accuracy, and the calculation method of the particle filter.

condition	calculation time [s]	estimation error
nomal	0.020405	0.107029
without ESS	0.018884	0.128374
MMSE	0.000771	0.131110
maxMAP	0.000762	0.220676

件、「maxMAP」は最大の重みを持つ粒子を MAP 推定とするという条件に基づくことを表す。特に、「MMSE」は先行研究⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾における PF の利用条件と同様であることから、これを利用して得られる制御結果を、それらの先行研究で利用された PF の制御結果として理解することができる。また表には、これらの条件の元での、1 サンプル毎の平均の計算時間と 500 サンプル毎に亘る推定誤差の平均を示している。使用した計算機の OS は Vine Linux 6.1, CPU は Intel Xeon E5-02630 (2.3GHz), メモリは 4GB である。

この結果より、提案手法の計算時間は長いですが、推定精度は最も高いことがわかる。

〈4・4〉 計算量 離散系の推定において、サンプリング周期の選定は重要な問題としてしばしば指摘される。システムパラメータの推定には適切なサンプリング周期が存在し、長すぎても短すぎても良好な推定精度が得られないことが指摘されている⁽¹⁷⁾。一般に、適切なサンプリング

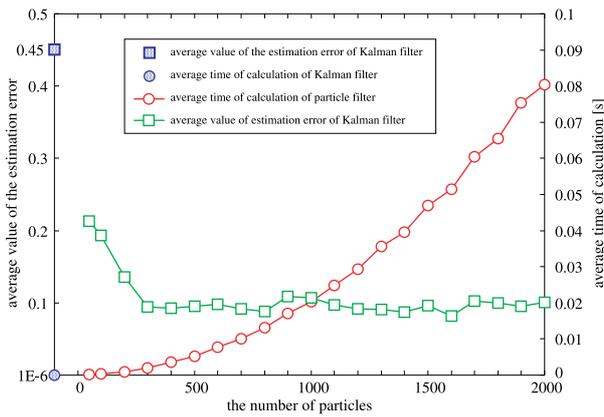


Fig. 7. Relationship between estimation accuracy, calculation time, and the number of particles.

周期の選定は推定目的と制御系の時定数に応じて試行錯誤的に行われ⁽¹⁷⁾, それはPFに基づく本手法においても基本的に同様である。ただし, 各サンプリング周期毎にPFによる推定手順を繰り返す必要があるため, サンプリング周期を短く設定することは, 計算量の増加に直結する。したがって, 本手法を実装する計算機が実行可能な最短のサンプリング周期を概算し, その値以上で最良のサンプリング周期を選定する必要がある。そこで, <4・2・2>に示したシミュレーション条件に基づき, PFの粒子数と計算時間および推定精度の関係について調べた結果をFig. 7に示す。用いた計算機の条件は<4・3>と同様である。

まず, PFでは粒子数を50とした場合でも, 推定の算出に1サンプリング周期で平均 $0.9 \cdot 10^{-5}$ [s]が必要であったのに対し, KFでは, 推定の平均誤差は0.45と大きいものの, 平均 $1.0 \cdot 10^{-6}$ [s]で計算が行われた。次に, PFの粒子数の増加に伴って計算時間は指数的に増加したが, このシミュレーション条件では, 粒子数300以上では推定精度に大きな差が見られないことがわかる。これらの結果より, KFはPFよりも多峰性の確率的ノイズに対する推定精度は劣るが計算量が非常に少なく高速であることや, PFの粒子は一定数以上増加させても推定精度の向上に貢献しないことがわかる。

一般的に, PFは並列的に多数の粒子を扱うためKFよりも計算量が多く, 実用上の問題とされることが多い。さらに, PFは対象の次元数の増加に伴って計算量が指数関数的に増加する⁽³⁾ため, 高次元の系に適用する場合には, RBPF (Rao-Blackwellized particle filter) と呼ばれる一部の状態変数の因果関係をKFで表現する手法の適用が必要となる⁽²⁾。すなわち, 状態ベクトルを非線形系として扱う部分と線形系として扱う部分に分割し, 前者にのみPFを適用して, 後者を前者の推定に付随させて解析的もしくはKFの利用により推定することで, PFの高次化を避ける。これはラオ-ブラクウェル化と呼ばれるテクニックであり⁽¹⁸⁾, どのように状態ベクトルを分割するかは対象や推定目的によって異なる。一方KFは, 実用において長時間に

わたり継続的な実行が必要である場合に, 逆行列計算における桁落ちなどを回避するためにSVDを適用する場合がある⁽¹⁹⁾が, それでもPFと比較してKFの計算量はごく少ない。しかし, 上述のシミュレーションで扱ったような低次のシステムでは, 特殊な計算高速化を考慮しない汎用計算機におけるC言語実装においても, PFはKF同様に実用で問題を生じない程度に十分高速な実行が可能であった。また, より高次のシステムの状態フィードバック制御にPFを組み込む場合にも, 並列処理やGPGPUの利用によって計算速度の問題を解決できる可能性がある⁽²⁰⁾。

5. おわりに

本論文では, PFを状態フィードバック制御系のオブザーバとして利用する手法を提案し, 次のことを示した。まず, 本手法による状態フィードバック系の極配置において, PFによる推定の収束速度を考慮する必要は無く, レギュレータは閉ループが漸近安定となるように設計すればよいことを述べた。次に, 自由系および本手法により構成した状態フィードバック制御系に対して, KFとPFによる状態推定の性能をシミュレーションにより検証した。その結果, 単峰性の観測ノイズが混入する場合にはKFとPFの性能はほぼ同等であることや, 多峰性確率密度を有する観測が混入する場合において, 提案手法はKFよりも高精度かつ安定な状態推定を達成し, 高精度の制御に寄与することを示した。また, シミュレーションにより, PFの粒子数と計算量, 推定精度の関係や, 導入したpf-MAPとESS法の効果を検証した。本手法により構築するオブザーバによって, 非ガウス性の確率的ノイズが混入する低レベル制御系に対する頑健な状態推定が可能となることが示された。

今後の発展として, 本手法をより多くの実際の事例への適用や有効性の検証等が挙げられる。特に, 本手法を4次以上の高次系に対して適用するためにはRBPFによる手法の拡張が必要となるが, その場合の本手法の具体的な適用方法や有効性の検証は重要であると考えられる。

文 献

- (1) A. Doucet, N. Freitas, and N. Gordon (eds): sequential Monte Carlo methods in practice, pp.3-14, New York, Springer (2001)
- (2) 生駒哲一: 21世紀の統計科学III, 国友直人等(監修), pp.305-338, 東京大学出版会 (2008)
- (3) S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox: Probabilistic Robotics, MIT Press (2005)
- (4) R. Ueda: "Evolving Probabilistic Robotics", JRSJ, Vol.29, No.5, pp.404-407 (2011) (in Japanese)
上田龍一: 「確率ロボティクスの展望」日本ロボット学会誌, Vol.29, No.5, pp.404-407 (2011)
- (5) G. G. Rigatos: "Particle and Kalman Filtering for State Estimation and Control of DC motors", ISA Trans., Vol.48, pp.62-72 (2009)
- (6) G. G. Rigatos: "Extended Kalman and Particle Filtering for sensor fusion in Motion Control of Mobile Robots", Mathematics and Computers in Simulation, Vol.81, pp.590-607 (2010)
- (7) D. Stahl and J. Hauth: "PF-MPC: Particle Filter-model pre-

dictive control”, *Systems & Control Letters*, Vol.60, pp.632–643 (2011)

(8) J. N. Driessen and Y. Boers: Particle filter MAP estimation in dynamical systems, in *The IET Seminar on Target Tracking and Data Fusion Algorithms and Applications*, pp.1–25, Birmingham, UK (2008)

(9) S. Godsill, A. Doucet, and M. West: “Maximum a posteriori sequence estimation using Monte Carlo Particle filters”, *The Institute of Statistical Mathematics*, Vol.53, No.1, pp.82–96 (2001)

(10) S. Saha, P. K. Mandal, and A. Bagchi: “A new approach to particle based smoothed marginal MAP”, *Proc. of EUSIPCO*, pp.25–29 (2008)

(11) J. S. Liu and R. Chen: Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.93, No.443, pp.1032–1044 (1998)

(12) S. K. Zhou, R. Chellappa, and B. Moghaddam: “Visual Tracking and Recognition using Appearance-Adaptive Models in Particle Filters”, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol.13, No.11, pp.1491–1506 (2004)

(13) J. V. Candy: “Bootstrap particle filtering”, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol.24, No.4, pp.73–85 (2007)

(14) Y. Boers and J. N. Driessen: “A Particle Filter Based Detection Schemes”, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol.10, No.10, pp.300–302 (2003)

(15) O. Cappé, S. J. Godsill, and E. Moulines: “An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo”, *IEEE Proceedings*, Vol.95, No.5, pp.899–924 (2007)

(16) B. Silverman: *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC (1986)

(17) 相良節夫・江口三代一: 「システム同定における信号処理」, 計測と制御, Vol.4, No.28, pp.309–315 (1989)

(18) A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu: “On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering”, *Statistics and Computing*, Vol.10, pp.197–208 (2000)

(19) 片山 徹: 応用カルマンフィルタ, pp.182–186, 朝倉書店 (2000)

(20) N. Ikoma and A. Asahara: “Real Time Color Object Tracking on Cell Broadband Engine Using Particle Filters”, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, Vol.14, No.3, pp.272–280 (2010)

付 録

1. pf-MAP の導出

時刻 k におけるフィルタリングされた確率密度の MAP 推定は次のように与えられる。

$$\mathbf{x}_{k|k}^{\text{MAP}} = \underset{\mathbf{x}_k}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \dots \dots \dots \text{(付 1)}$$

PF により, 一般的な非線形モデルに対する事後確率密度を M 個の重み付けされた粒子群により以下のように近似することができる。

$$\hat{P}(d\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \simeq \sum_{i=1}^M \pi_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}(d\mathbf{x}_k) \dots \dots \dots \text{(付 2)}$$

これにベイズ則を適用すると, 式 (付 1) の事後確率密度関数は次のように表せる。

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \dots \dots \dots \text{(付 3)}$$

ここで分母は \mathbf{x}_k に独立であるので,

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}_{1:k}) \propto p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \dots \dots \dots \text{(付 4)}$$

と表せる。したがって, 式 (付 1) は次のように表せる。

$$\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = \underset{\mathbf{x}_k}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \dots \dots \text{(付 5)}$$

尤度 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ はすべての \mathbf{x}_k について算出可能であるので, 上式の算出の主問題は予想確率密度関数 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ の算出である。そこで以下の関係を利用する。

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \dots \dots \dots \text{(付 6)}$$

さらに式 (付 2) より, モンテカルロ積分によって $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ の近似が得られる。

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \simeq \sum_{i=1}^M p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \pi_{k-1}^{(i)} \dots \dots \text{(付 7)}$$

式 (付 7) を式 (付 4) に組み込むことで, MAP 推定 (pf-MAP) が以下のように導かれる。

$$\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = \underset{\mathbf{x}_k^{(m)}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(m)}) \sum_{i=1}^M p(\mathbf{x}_k^{(m)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \pi_{k-1}^{(i)} \dots \dots \dots \text{(付 8)}$$

この計算量は $O(M^2)$ である。

西 田 健 (正員) 1998 年九工大・工・設計生産工卒。2002 年九工大大学院博士後期課程修了。同年より九工大・機械知能工学・助手。2007 年より助教, 博士(工学)。屋外移動ロボットに関する研究に従事。日本ロボット学会, 計測自動制御学会, 日本神経回路学会, 電子情報通信学会などの会員。

