対応不明のポイントクラウド照合

九州工業大学　○西田 健，黒木 秀一

Non-Corresponding Point Cloud Matching

Takeshi NISHIDA, Shuichi Kurogi
Kyushu Institute of Technology

Abstract： 著者らは近年，対応不明の 3 次元ポイントクラウド間の最良の回転行列と置換行列を求める手法を提案した．本手法は特異値分解を利用する高速で簡潔な手法であり，照合に必要な回転行列と置換行列を 2 ステップで導出できる．また，構成点数が異なるポイントクラウドを対応付ける回転行列を求めることもできる．しかし，本手法の適用にはいくつかの制約がある．そこで本稿では，ICP アルゴリズムの一部に本手法を組み込むことで，ポイントクラウド照合を高速化する手法を提案する．

1． はじめに

環境や物体の認識に広く利用される LRF（Laser Rangefinder）や深度センサなどによって，距離や形状のデータを 3 次元点群（PC: point cloud）として高速かつ大量に獲得することが可能である．近年，これらのセンサを利用して 3 次元環境を理解するための技術が各種産業分野で活発に研究されており [1]，自動走行ロボットやアーム型産業ロボットのワークハンドリングなどの分野で応用が盛んである．

この分野における基礎研究において，著者らは最近，簡便な PC の照合手法を提案した [2]．本手法は繰り返し手順を必要とせず，二つの PC を対応付ける回転行列と要素の対応関係を表す置換行列を 2 ステップで導出することができる．本稿では，この手法に焦点を当て，その基礎的な証明と特長を述べる．

2． ポイントクラウド照合の定式化

PC 認識において，「計測された PC」と「データベースとして登録されている PC」の大局的および局所的な対応関係を表現する線形変換のパラメータの推定は核心的な手続きであり，次のように定式化できる[*1][3]：N 個の 3 次元点の集合 $A = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^N$ と $B = \{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ が与えられたとする．それらの要素である 2 点 $\boldsymbol{a}_i$，$\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^3$ は対応している（ある一点を異なる視点から計測したデータである）とし，回転行列 $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ と平行移動成分 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$ から成る姿勢パラメータ $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}) \in SE(3)$ によって以下のように関連付けられるとする．

$$\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{t} \tag{1}$$

これらの $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_i$ を列として並べた行列をそれぞれ $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3\times N}$ とおくと，これらを対応付ける姿勢パラメータ $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t})$ を推定する問題は，次の目的関数の最小化問題に帰着される．

$$\min_{(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t})\in SE(3)} \left\| \boldsymbol{B} - \left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{1}^T\right) \right\|_F \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{1} = [1, 1, \cdots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$ であり，$\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルムを表す．平行移動成分 $\boldsymbol{t}$ は，$\boldsymbol{R}$ が求まれば点集合の重心を一致させることで算出可能である．すなわち，

$$\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{a}} \tag{3}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = (1/N)\boldsymbol{A}\boldsymbol{1} \tag{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = (1/N)\boldsymbol{B}\boldsymbol{1} \tag{5}$$

であるので，式 (2) の目的関数は $\boldsymbol{R}$ のみに依存する形式で次のように表現できる．

$$\min_{\boldsymbol{R}\in SO(3)} \left\| \boldsymbol{B}' - \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}' \right\|_F \tag{6}$$

ここで，$SO(3)$ は 3 次元回転群であり，

$$\boldsymbol{A}' = [\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_N] = \boldsymbol{A}\left\{\boldsymbol{I}_N - (1/N)\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\right\} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}' = [\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_N] = \boldsymbol{B}\left\{\boldsymbol{I}_N - (1/N)\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\right\} \tag{8}$$

である．

この問題に対して，現在までに Procrustes 解析と呼ばれる一連の研究成果 [4] を利用した手法が数多く提案されている．この研究成果の一つとして，対応関係既知である点群を扱うこの問題の解 $\boldsymbol{R}$ は，特異値分解（SVD：singular value decomposition）を用いることで

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T \tag{9}$$

として求まることが知られている [5, 6]．ここで，

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'^T = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T \in \mathbb{R}^{3\times3} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & 1 & |\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^T|\end{bmatrix} \tag{11}$$

であり，$\boldsymbol{S}$ は計測データに計測ノイズが多く含まれる場合に発生する鏡像マッチングを回避するための行列である．これは，ICP（iterative closeset point）アルゴリズム [1]

[*1] ここでは各 PC の構成点数の差異や PC の切り出しの誤りは考慮せず定式化を行う．

における回転行列推定に用いられる手続きとして知られる．ただし，この手法の適用には $\boldsymbol{A}'$ と $\boldsymbol{B}'$ の要素が精度良く対応している必要がある．したがって，ICP アルゴリズムには，点群の対応関係を求めるための手続きが含まれる．また，その手続に初期値依存性があるという問題や，PC の構成要素数の増加に伴う計算量が 2 乗オーダで増加するという問題の存在が知られている．

一方，現在までにあまり注目されることの無かった Procrustes 解析の成果の一つに，式 (9) とは異なる SVD の利用に基づく解析がある [7, 8]．著者らは近年，その解析に基づく点群間の回転と対応関係の推定を提案し，具体的に検証した [2]．文献 [2] において，Procrustes 問題における一つの解析結果と，対応関係未知の PC の照合問題の定式化が一致することが示された．また，その関係性の利用によって PC の対応を表す行列と回転変換行列を同時に導出できることが示された．さらに，この解法の応用によって，構成要素数が異なり，かつ対応関係が未知の二つの PC 間の回転行列の推定問題をも解くことができることが示された．

本稿は，文献 [2] に示した解析の実利用に向けた指針を明らかにするために，本手法の証明の詳細を示すとともに，本手法の特長や制約を示す．

3． 特異値分解による回転行列の推定

3.1 3 次元回転変化に対する特異値分解の不変性

まず，重心が座標の原点に一致する点群の要素

$$\boldsymbol{a}_n^T = [a_{xn} \quad a_{yn} \quad a_{zn}] \in A \tag{12}$$

から構成した行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T & \cdots & \boldsymbol{a}_N^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times N} \tag{13}$$

を考える．ここで，A は重複する点を含まないこととする．さらに，回転行列 $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ により $\boldsymbol{A}$ を回転変換した行列を $\hat{\boldsymbol{A}} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times N}$ と表す．ここで，回転行列は $\boldsymbol{R} \triangleq \boldsymbol{R}_z(\rho)\boldsymbol{R}_y(\phi)\boldsymbol{R}_x(\theta) \in SO(3)$ であり，θ，ϕ，ρ はそれぞれ x，y，z 軸まわりの回転角度を表す．

次に，これらの SVD を次のように表す[*2]．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_A \boldsymbol{\Sigma}_A \boldsymbol{V}_A^T \tag{14}$$
$$\boldsymbol{U}_A = [\boldsymbol{u}_{A1} \quad \boldsymbol{u}_{A2} \quad \boldsymbol{u}_{A3}] \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{15}$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_A = \mathrm{diag}[\sigma_{A1}, \sigma_{A2}, \sigma_{A3}] \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{16}$$
$$\boldsymbol{V}_A = [\boldsymbol{v}_{A1} \quad \boldsymbol{v}_{A2} \quad \boldsymbol{v}_{A3}] \in \mathbb{R}^{N\times 3} \tag{17}$$

*2 ここで扱うような $3 << N$ である行数の特異値分解は薄い特異値分解（thin SVD）と呼ばれ，計算の高速化が可能である [9, 10]．

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U}_{\hat{A}} \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{A}} \boldsymbol{V}_{\hat{A}}^T \tag{18}$$
$$\boldsymbol{U}_{\hat{A}} = [\boldsymbol{u}_{\hat{A}1} \quad \boldsymbol{u}_{\hat{A}2} \quad \boldsymbol{u}_{\hat{A}N}] \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{19}$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{A}} = \mathrm{diag}[\sigma_{\hat{A}1}, \sigma_{\hat{A}2}, \sigma_{\hat{A}3}] \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{20}$$
$$\boldsymbol{V}_{\hat{A}} = [\boldsymbol{v}_{\hat{A}1} \quad \boldsymbol{v}_{\hat{A}2} \quad \boldsymbol{v}_{\hat{A}3}] \in \mathbb{R}^{N\times 3} \tag{21}$$

ただし，$\sigma_{A1} > \sigma_{A2} > \sigma_{A3} > 0$ および $\sigma_{\hat{A}1} > \sigma_{\hat{A}2} > \sigma_{\hat{A}3} > 0$ とし，後述する推定の一意性を保つために等号は含まないとする．また，$\boldsymbol{U}_A$ と $\boldsymbol{U}_{\hat{A}}$ を左特異ベクトル行列，$\boldsymbol{V}_A$ と $\boldsymbol{V}_{\hat{A}}$ を右特異ベクトル行列と呼ぶ．さらに，よく知られるように $\boldsymbol{U}_A^T\boldsymbol{U}_A = \boldsymbol{V}_A^T\boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{I}_3$ である．

さて，回転行列 $\boldsymbol{R}$ は直交行列であるので $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_3$ より，

$$\hat{\boldsymbol{A}}^T\hat{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \tag{22}$$

であり，また，

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}_A\boldsymbol{\Sigma}_A^2\boldsymbol{V}_A^T \tag{23}$$
$$\hat{\boldsymbol{A}}^T\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}_{\hat{A}}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{A}}^2\boldsymbol{V}_{\hat{A}}^T \tag{24}$$

である．これらより，

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \hat{\boldsymbol{A}}^T\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i \tag{25}$$

を満たす固有値 λ_i と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ は条件 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ に対して一意に定まり，

$$\lambda_i = \sigma_{Ai}^2 = \sigma_{\hat{A}i}^2 \tag{26}$$
$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{v}_{Ai} = \boldsymbol{v}_{\hat{A}i} \tag{27}$$

となる．したがって，

$$\boldsymbol{\Sigma}_A = \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{A}} \tag{28}$$
$$\boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{V}_{\hat{A}} \tag{29}$$

の関係が得られる．これより，

$$\boldsymbol{U}_{\hat{A}}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{A}}\boldsymbol{V}_{\hat{A}}^T = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{\Sigma}_A\boldsymbol{V}_A^T \tag{30}$$

の関係を考慮すると，

$$\boldsymbol{U}_{\hat{A}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}_A \tag{31}$$

がいえる．

以上の性質を利用すると，各要素の対応関係が既知である二つの PC を関連づける回転行列は，回転変換前後の右特異ベクトル行列を利用することによって次のように導出できる．

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}_{\hat{A}}\boldsymbol{U}_A^T \tag{32}$$

3.2 対応不明の点群の回転・置換行列の導出

行列 $\boldsymbol{A}$ の列を順不同に入れ替えた行列を

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n, \cdots, \boldsymbol{b}_N] \in \mathbb{R}^{3\times N} \tag{33}$$

とする．ここで $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ は任意の置換行列である．置換行列は正規直交行列なので $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{I}_N$ より，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T \tag{34}$$

となる．ここで $\boldsymbol{B}$ の SVD を

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_B\boldsymbol{\Sigma}_B\boldsymbol{V}_B^T \tag{35}$$

$$\boldsymbol{U}_B = [\boldsymbol{u}_{B1} \quad \boldsymbol{u}_{B2} \quad \boldsymbol{u}_{B3}] \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_B = \mathrm{diag}[\sigma_{B1}, \sigma_{B2}, \sigma_{B3}] \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{37}$$

$$(\sigma_{B1} > \sigma_{B2} > \sigma_{B3} > 0)$$

$$\boldsymbol{V}_B = [\boldsymbol{v}_{B1} \quad \boldsymbol{v}_{B2} \quad \boldsymbol{v}_{B3}] \in \mathbb{R}^{N\times 3} \tag{38}$$

と表すと，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{U}_B\boldsymbol{\Sigma}_B^2\boldsymbol{U}_B^T = \boldsymbol{U}_A\boldsymbol{\Sigma}_A^2\boldsymbol{U}_A^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T \tag{39}$$

において，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}_i' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}_i' = \lambda_i'\boldsymbol{x}_i' \tag{40}$$

を満たす固有値 λ_i' と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i'$ は条件 $\lambda_1' > \lambda_2' > \lambda_3' > 0$ に対して一意に定まり，

$$\lambda_i' = \sigma_{Ai}^2 = \sigma_{Bi}^2 \tag{41}$$

$$\boldsymbol{x}_i' = \boldsymbol{u}_{Ai} = \boldsymbol{u}_{Bi} \tag{42}$$

が成り立つので，

$$\boldsymbol{\Sigma}_A = \boldsymbol{\Sigma}_B \tag{43}$$

$$\boldsymbol{U}_A = \boldsymbol{U}_B \tag{44}$$

がいえる．

次に，回転行列 $\boldsymbol{R}$ により $\boldsymbol{B}$ を回転変換した行列を $\hat{\boldsymbol{B}} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3\times N}$ とし，この行列の SVD を

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{U}_{\hat{B}}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{B}}\boldsymbol{V}_{\hat{B}}^T \tag{45}$$

と表す．ここで，$\sigma_{\hat{B}1} > \sigma_{\hat{B}2} > \sigma_{\hat{B}3} > 0$ である．すると，式 (31)，(32)，(44) より，

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}_{\hat{B}}\boldsymbol{U}_A^T \tag{46}$$

がいえる．すなわち，行列 $\boldsymbol{A}$ をテンプレートパターン，行列 $\hat{\boldsymbol{B}}$ を回転変換が施された対応関係未知のテストパターンであると見なすと，それぞれの左特異ベクトル行列を利用することで回転行列を求めることができる．また，$\boldsymbol{U}_A$ および $\boldsymbol{U}_{\hat{B}}$ は列数（すなわち 3 次元点の数）に依らず，常に 3 行 3 列となるので，テンプレートパターンとテストパターンの要素数が異なる場合にも式 (46) を用いることができる．さらに，上述の関係性をすべて考慮すると，

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}_A\boldsymbol{V}_B^T \tag{47}$$

の関係も容易に導出される．すなわち，テンプレートパターンと回転変換が施された対応関係未知のテストパターンの右特異ベクトル行列を利用することで，それらの構成要素の対応関係を表す置換行列を求めることができる．

以上をまとめると，対応不明の 2 つの PC を関連付ける回転変換行列 $\boldsymbol{R}$ と置換行列 $\boldsymbol{P}$ は，

1. 2 組の点群から構成される行列にそれぞれ SVD を施す．
2. それぞれの左特異ベクトル行列（右特異ベクトル行列）の内積を計算する（右特異ベクトル行列の内積計算は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の列数が等しい場合のみ実行可能）．

という，対応点探索のための繰り返しを必要としない簡便な手続きにより求めることができる．また，$\boldsymbol{U}_A$，$\boldsymbol{V}_A$ と $\boldsymbol{U}_B$，$\boldsymbol{V}_B$ はそれぞれ個別に扱うことができるので，置換行列と回転行列は独立して算出できる．さらに，データ点集合の要素数に依らず常に $\boldsymbol{U}_A$，$\boldsymbol{U}_{\hat{B}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ であるので，2 組の点群の要素数が異る場合にも，式 (46) による回転行列の算出が可能である．

4． ICP アルゴリズムとの関係

本手法は，手続きの簡便さや繰り返し手続き必要としないという特長を備えているが，次のような制約がある．

1. 二つの PC は同一の 3 次元領域を表現する．
2. 構成要素の 3 次元点群は一様に分布する．

すなわち，本手法の適用には，分布に偏りがない PC が前処理によって適切に切り出されている必要がある．さらに SVD の計算精度の制約により，PC の要素数 N が大きい場合には対応関係を記述する $\boldsymbol{P}$ が精度良く求まらない．したがって，本手法を実応用に適用するのは困難であるように見える．

一方で ICP アルゴリズムは，部分的な 3 次元形状データを対応関係未知の状況で，より大きなモデル形状に対して照合するための手法である．すなわち，対応が与えられていない二つの点群 C と D の照合を行うために，以下の処理を反復する [3]．

1. 仮の対応を与える：C の各点 $\boldsymbol{c}_i$ に最も近い D の点 $\boldsymbol{d}_i$ を求める．
2. 式 (2) と同じ以下の目的関数を最小化する姿勢パラメータを求める．

$$\min_{\boldsymbol{R}\in SO(3)} \|\boldsymbol{D} - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{1}^T)\|_F \tag{48}$$

3. 求められた姿勢パラメータで PC を座標変換し誤差を算出する．
4. 誤差が閾値以上なら 1 に返る．閾値以下なら処理を終了する．

ここで，$\boldsymbol{C} \triangleq [\boldsymbol{c}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{c}_N]$ であり，2. の処理は式 (3) から式 (11) に従う．また，実際には他に様々な工夫が必要であ

る（例えば，$\boldsymbol{x}_i$ のサンプル方法や，最近隣点の求め方，対応点がない場合の処理など）．しかし，ここで注目すべきは，1. と 2. の処理は $\boldsymbol{R}$ を導出するための処理であるので，これらを前述の提案手法で置き換えることができるということである．ICP アルゴリズムの通常の応用では，数十から数千回の繰り返しによって収束を得るが，本手法の導入によってその繰り返し手順の劇的な低減が見込まれる．現在我々はこのアイディアに基づき，PC を扱うための C 言語ライブラリ（Point Cloud Library[12]）における ICP アルゴリズムの改変と評価に着手している．

さらに，SVD のプログラム実装には複数の選択肢が存在し，それらの計算精度が異なる [10] ため，本手法に適する SVD アルゴリズムの選定も重要であると考えられる．

5． おわりに

本稿では，先に著者らが提案した PC の照合手法の基本的な証明と特長を明らかにした．本手法は繰り返し手続きを必要とせず，対応関係未知の PC 間の回転行列と対応関係を 2 ステップで導出できる．しかし，実応用に対する本手法の利用を困難にするいくつかのの制約条件があるため，本稿では ICP アルゴリズムの一部に本手法を組み込んで利用することを提案した．さらに SVD のアルゴリズム選定とその計算精度の考慮が必要であることを指摘した．

今後は，本稿における提案に基づく高速な ICP アルゴリズムの実装と性能評価を行う予定である．

参考文献

[1] Paul J.Besl and Neil D.McKay: “A Method for Registration of 3-D Shapes,” IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 14, No. 2, pp. 239–256, 1992.

[2] 西田 健，黒木 秀一:“対応関係が不明な 3 次元点集合間の回転行列の推定,” 日本ロボット学会誌, Vol. 31, No. 6, pp. 624-627. 2013.

[3] 玉木 徹: “姿勢推定と回転行列,” 信学技報, Vol. 109, No. 203, SIS2009-23, pp. 59–64, 2009.

[4] M. D. Akca: “Generalized Procrustes Analysis and Its Applications in Photogrammetry,” Technical report, ETH, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Institute of Geodesy and Photogrammetry, 2003.

[5] K. Kanatani: “Analysis of 3-D rotation fitting,” IEEE trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 16, No. 5, pp. 543–549, 1994.

[6] S. Umeyama: “Least-Squares Estimation of Transformation Parameters Between Two Point Patterns,” IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.13, No.4, pp.376–380, 1991.

[7] P. H. Schönemann: “A Generalized Solution of The Orthogonal Procrusters Problem,” Psychometrika, Vol. 31, No. 1, pp. 1–10, 1966.

[8] N. Higham, “Matrix Procrustes probulems,” The University of Manchester, 1993.

[9] T. F. Chan, ”An Improved Algorithm for Computing the Singular Value Decomposition”, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 8, pp. 72–83, 1982.

[10] GNU Science Library, http://www.gnu.org/software/gsl/

[11] 増田 健:“ICP アルゴリズム,” 研究報告コンピュータビジョンとイメージメディア（CVIM）, Vol. 2009-CVIM-168, No. 23, pp.1–8, 2009.

[12] Point Cloud Library, http://pointclouds.org/