

対応関係が不明な三次元点集合間の回転行列の推定

西田 健* 黒木 秀一*

Rotation Matrix Estimation Between Non-Corresponding 3-D Point Sets

Takeshi Nishida* and Shuichi Kurogi*

A method to solve a pose estimation problem, that is, the estimation of a rigid body transformation (in particular, a rotation matrix) that gives the best match between the registration of non-corresponding 3-D point sets is proposed. First, it is shown that the rotation matrix can be estimated by left singular vector matrices derived by the singular value decomposition of the given 3-D point sets. Next, it is shown that the rotation matrix between non-corresponding 3-D point sets whose number of elements is different can be found immediately using the proposed method by numerical simulations.

Key Words: Non-corresponding 3-D Point Sets, Rotation Matrix Estimation, Singular Value Decomposition

1. はじめに

近年、コンピュータビジョンのアプリケーションにおいて、LRF (laser rangefinder) などによって獲得した三次元点のデータ集合を用いる物体認識は重要な技術である。この技術において、三次元点の集合として表現された物体の表面形状の大局的および局所的な対応関係を表す線形変換のパラメータの推定は核心的な手続きであり、この問題は次のように定式化できる [1]: N 個の三次元点の集合 $A = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^N$, $B = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ が与えられたとする。ここで、それぞれの集合における対応する 2 点 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ の組は、ある未知の回転行列 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ と平行移動成分 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ から成る姿勢パラメータ $(\mathbf{R}, \mathbf{t}) \in SE(3)^\dagger$ によって以下のように関連付けられるとする。

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{R}\mathbf{a}_i + \mathbf{t} \quad (1)$$

これらの \mathbf{a}_i と \mathbf{b}_i を列として並べて構成した行列をそれぞれ $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times N}$ とすると、これらに対応付ける姿勢パラメータ (\mathbf{R}, \mathbf{t}) を推定する問題は、次の目的関数の最小化問題に帰着される。

$$\min_{(\mathbf{R}, \mathbf{t}) \in SE(3)} \left\| \mathbf{B} - (\mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{t}\mathbf{1}^T) \right\|_F \quad (2)$$

ここで $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$ であり、 $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルムを表す。平行移動成分 \mathbf{t} は、 \mathbf{R} が求めれば点集合の重心

を一致させることで算出可能である。すなわち、 $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{a}} = (1/N)\mathbf{A}\mathbf{1}$, $\bar{\mathbf{b}} = (1/N)\mathbf{B}\mathbf{1}$ であるので、式 (2) の目的関数は \mathbf{R} のみに依存する形式で次のように表現できる。

$$\min_{\mathbf{R} \in SO(3)} \left\| \mathbf{B}' - \mathbf{R}\mathbf{A}' \right\|_F \quad (3)$$

ここで、 $SO(3)$ は三次元回転群を表し、

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_N] = \mathbf{A} \{ \mathbf{I}_N - (1/N)\mathbf{1}\mathbf{1}^T \} \quad (4)$$

$$\mathbf{B}' = [\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_N] = \mathbf{B} \{ \mathbf{I}_N - (1/N)\mathbf{1}\mathbf{1}^T \} \quad (5)$$

である。さらに $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は単位行列、 $\mathbf{a}'_i, \mathbf{b}'_i \in \mathbb{R}^3$ はそれぞれ $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ から平行移動成分を減じた三次元点を表す。

この問題に対して、現在までに Procrustes 解析と呼ばれる一連の研究結果 [2] を利用した手法が数多く提案されている。この問題の解法の一つに、以下のように特異値分解 (SVD: singular value decomposition) を用いる手法がある [3] [4]。

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{B}'\mathbf{A}'^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (7)$$

は $\mathbf{B}'\mathbf{A}'^T$ の SVD を表し、 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は左特異ベクトル行列、 $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は特異値を対角成分に持つ行列、 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は右特異ベクトル行列を表す。また、

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left(1 \quad 1 \quad |\mathbf{V}\mathbf{U}^T| \right) \quad (8)$$

[†]SE(3) は三次元空間におけるユークリッド運動群である。

原稿受付 2012 年 9 月 28 日

*九州工業大学

*Kyushu Institute of Technology

■ 本論文は提案性で評価されました。

であり、これは計測データにノイズが多く含まれる場合に発生する鏡像マッチングを回避するための行列である。これは、ICP (interactive closest point) アルゴリズム [5] における回転行列推定に用いられる手続きとしてよく知られる。ただし、このような特異値分解を用いる手法の適用のためには、式 (7) において A' と B' の各要素が精度良く対応している必要がある。したがって、ICP アルゴリズムには三次元点集合の対応関係を求める手続きが含まれる。

一方、現在までにあまり注目されることのなかった Procrustes 解析の成果の一つに、式 (6) とは異なる SVD の利用に基づく解析がある [6] [7]。筆者らの調査の範囲では、その解析に基づく点集合の回転と対応関係の推定を具体的に検証した研究は現在まで行われていない。本論文ではこの解析に着目し、その利用によって点集合の回転と対応関係を簡便な計算によって求めることができることを示す。すなわち、Procrustes 問題における一つの解析結果と、対応関係未知の三次元点集合の照合問題の定式化が一致することを示し、さらに、その関係性の利用によって点集合の対応を表す行列と回転変換行列を同時に導出できることを示す。また、この解法の応用によって、構成要素数が異なり、かつ対応関係が未知の 2 組の三次元データ点集合間の回転行列の推定問題をも解くことができることを示す。最後に、乱数を含む三次元データ集合を利用した数値シミュレーションにより、本手法による解法の有効性を示す。

2. 特異値分解による回転行列の推定

Procrustes 解析において次のような問題と解法が与えられている [6] [7]。すなわち、 $C, D \in \mathbb{R}^{k \times l}$ が与えられた元で

$$\min \|C - EDF\|_F : E^T E = I_k, F^T F = I_l \quad (9)$$

を満たす E と F は、

$$E = U_C U_D^T, F = V_D V_C^T \quad (10)$$

で与えられる。ただし、SVD により $C = U_C \Sigma_C V_C^T$ および $D = U_D \Sigma_D V_D^T$ である。

一方、任意の置換行列 $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ の導入により、対応関係が未知の点集合間の回転行列を求める式 (3) の問題は以下のように変換される。

$$\min_{R \in SO(3)} \|B' - RA'P\|_F \quad (11)$$

この式を上述の解析と対応させると、回転行列と置換行列は次のように求まる。

$$R = U_{B'} U_{A'}^T \quad (12)$$

$$P = V_{A'} V_{B'}^T \quad (13)$$

ここで、 $A' = U_{A'} \Sigma_{A'} V_{A'}^T$ および $B' = U_{B'} \Sigma_{B'} V_{B'}^T$ であり、 $U_{A'}, U_{B'} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は左特異ベクトル行列、 $V_{A'}, V_{B'} \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ は右特異ベクトル行列である。すなわち、対応関係が未知の三次元データ集合に対する回転変換行列 (もしくは置換行列) は、

- (1) 2 組の三次元点集合から構成される行列に SVD を施す。
- (2) 二つの左特異ベクトル行列 (右特異ベクトル行列) の内積を計算する。

という簡便で、繰り返し計算を必要としない手続きにより求めることができる。また、 $U_{A'}, V_{A'}$ と $U_{B'}, V_{B'}$ はそれぞれ独立に算出され、個別に扱うことができるので、置換行列と回転行列は独立して算出することができる。さらに、データ点集合の要素数に依らず常に $U_{A'}, U_{B'} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ であるので、2 組のデータ点集合の要素数が異なる場合にも式 (12) による回転行列の算出が可能である。

3. 数値実験

3.1 対応関係が既知もしくは不明な場合

モデルパターンとして、次のような手順で回転非対称な三次元点群を生成した。まず、以下の点群を生成した。

$$a_i = [a_{xi} \ a_{yi} \ a_{zi}] = [m \ n \ r] \quad (14)$$

ここで $m = 20, 21, \dots, 79$, $n = 20, 21, \dots, 99$, $r \in [0, 10]$ は一様乱数、データ点の数は 7,600 である。次に、点群の重心が座標原点と一致するように、すべての点を並行移動した。その結果得られた点群から行列 $A_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 7600}$ を構成した。これをモデルパターンと呼び、Fig. 1 (a) に概観を示す。次に、 A_0 を $R = R_z(50 [\text{deg}]) R_y(40 [\text{deg}]) R_x(30 [\text{deg}])$ によって回転し行列 $B_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 7600}$ を生成した。これを対応関係既知のテストパターンと呼ぶ。さらに、対応関係既知のテストパターン B_0 の列要素をランダムに生成した置換行列 P によって入れ替えることで B_1 を生成した。これを、対応関係未知のテストパターンと呼ぶ。これらのパターンの概観を Fig. 1 (b) に示す。図中の u_o ($o = 1, 2, 3$) は、座標原点を始点とした各パターンの左固有ベクトルを拡大して表示したものであり、これらは、各パターンの分布の主成分の方向を表していると考えられる。

以上の各パターンの SVD によって以下の左特異ベクトル行列を得た[†]。

$$U_{A_0} = \begin{bmatrix} 0.975070 & 0.221898 & 0.000044 \\ -0.221898 & 0.975070 & 0.000748 \\ 0.000123 & -0.000739 & 1.000000 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$U_{B_0} = U_{B_1} \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.581588 & -0.336721 & 0.740523 \\ 0.394052 & 0.912994 & 0.105666 \\ -0.711673 & 0.230350 & 0.663672 \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 U_{A_0} , U_{B_0} , U_{B_1} はそれぞれ、 A_0 , B_0 , B_1 の左特異ベクトル行列である。

これらより、回転行列は

$$\begin{aligned} U_{B_0} U_{A_0}^T &= U_{B_1} U_{A_0}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0.492404 & -0.456826 & 0.740843 \\ 0.586824 & 0.802872 & 0.105040 \\ -0.642788 & 0.383022 & 0.663414 \end{bmatrix} \\ &= R_z(50 [\text{deg}]) R_y(40 [\text{deg}]) R_x(30 [\text{deg}]) \end{aligned} \quad (18)$$

[†]GNU Science Library [8] の gsl_linalg_SV_decomp_jacobi 関数を用いた。

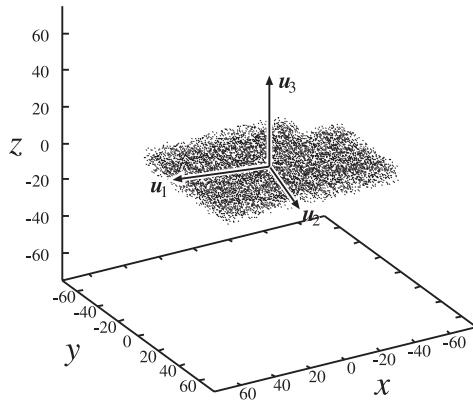
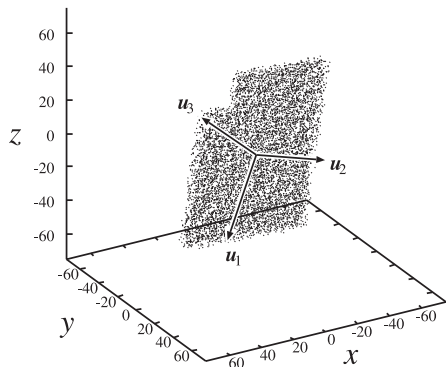
(a) Template pattern A_0 (b) Test pattern $B_0 = RA_0$ or $B_1 = RA_0P$

Fig. 1 Numerical 3-D patterns

と求まる. すなわち提案手法により, 対応関係が既知および未知の2組の三次元点集合に対して, 回転行列を誤差なく推定できることが確かめられた.

次に, SVDにより算出された A_0 および B_0, B_1 の右特異ベクトル行列 V_{A_0} および V_{B_0}, V_{B_1} を用い, 式 (13) に基づいて以下のように置換行列の推定を行った.

$$V_{A_0}V_{B_0}^T = \hat{P}_{B_0} \quad (19)$$

$$V_{A_0}V_{B_1}^T = \hat{P}_{B_1} \quad (20)$$

これらの精度を検証するために, $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($N = 7600$) および B_1 を生成するために用いた置換行列 P に対する \hat{P}_{B_0} と \hat{P}_{B_1} の各要素の誤差の平均を求めた. その結果, 以下のように置換行列の推定には誤差が生じることが確かめられた.

$$\|I - \hat{P}_{B_0}\|_F / N^2 = 3.12 \cdot 10^{-4} \quad (21)$$

$$\|P - \hat{P}_{B_1}\|_F / N^2 = 3.12 \cdot 10^{-4} \quad (22)$$

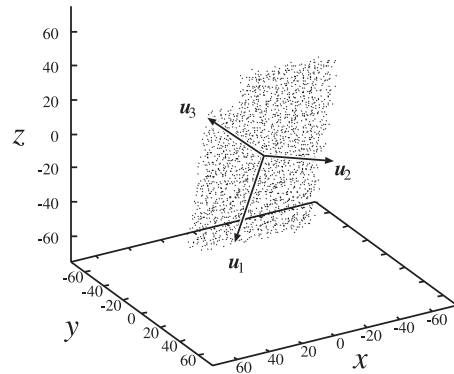
これらの誤差の発生原因は不明であるが, SVDの数値計算の誤差がその可能性の一つとして考えられる.

3.2 対応関係が不明かつ構成点数が異なる場合

次に, テストパターン B_1 の三次元点の分布密度を約25%とした点群

$$c_i = [c_{xi} \quad c_{yi} \quad c_{zi}] = [m \quad n \quad r] \quad (23)$$

を生成した. ここで $m = 20, 22, 24, \dots, 78, n = 20, 22,$

Fig. 2 Test pattern C . This is a rotated and shuffled test pattern

24, $\dots, 98, r \in [0, 10]$ は一様乱数, データ点の数は1,900である. これらの三次元点を並べた行列を $C \in \mathbb{R}^{3 \times 1900}$ とする. すなわち, これは A_0 との対応関係が未知で構成点数が異なるテストパターンである. このパターンの概観を Fig. 2 に示す. 行列 C の左特異ベクトル行列はSVDによって次のように算出された.

$$U_C = \begin{bmatrix} 0.582168 & -0.336679 & 0.740086 \\ 0.394133 & 0.913000 & 0.105307 \\ -0.711154 & 0.230386 & 0.664216 \end{bmatrix} \quad (24)$$

次に U_{A_0} を用いて回転行列の推定を行った結果, その誤差は以下ようになった.

$$\|R - U_C U_{A_0}^T\|_F = 2.687 \cdot 10^{-3} \quad (25)$$

すなわち, パターンを構成する点数が異なる場合にも一定の精度で回転行列の推定が行われることが確かめられた.

4. おわりに

本論文では, 対応が未知な三次元点集合間の対応関係と回転行列をSVDを利用して推定する手法を提案した. また数値実験により, 点集合の対応関係が既知である場合において, 本手法によって誤差なく回転行列を推定可能であることを示した. さらに, 2組の三次元データを構成する点数が異なる場合にも本手法の適用により回転行列の推定が可能であることを示した. ただし式 (3) の条件が示すように, 本論文における問題設定は照合を行う点集合同士が重心が一致していることを前提としており, それぞれの点集合が表現する空間領域がずれているような場合には, 提案手法の直接的な適用ができないことに注意が必要である.

今後の発展として, 置換行列の推定において発生した誤差の原因を追求することや, 実際の三次元計測データマッチングに本手法を適用し評価を行うことが挙げられる. また, 本手法が適用可能となる条件を, 理論的もしくは実験的に調査することが挙げられる. 例えば, 三次元点集合の主成分分析を用いる姿勢推定法と本提案法の関連の明確化や, Simultaneous Pose and Correspondence Determination と呼ばれる問題の解法に対する位置づけなどが考えられる.

参 考 文 献

- [1] 玉木徹: “姿勢推定と回転行列”, 信学技報, vol.109, no.203, SIS-2009-23, pp.59–64, 2009.
- [2] M.D. Akca: “Generalized Procrustes Analysis and Its Applications in Photogrammetry,” Technical report, ETH, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Institute of Geodesy and Photogrammetry, 2003.
- [3] K. Kanatani: “Analysis of 3-D rotation fitting,” IEEE trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.16, no.5, pp.543–549, 1994.
- [4] S. Umeyama: “Least-Squares Estimation of Transformation Parameters Between Two Point Patterns,” IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.13, no.4, pp.376–380, 1991.
- [5] P.J. Besl and N.D. McKay: “A Method for Registration of 3-D Shapes,” IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.14, no.2, pp.239–256, 1992.
- [6] P.H. Schönemann: “A Generalized Solution of The Orthogonal Procrustes Problem,” Psychometrika, vol.31, no.1, pp.1–10, 1966.
- [7] N. Higham: Matrix Procrustes problems. The University of Manchester, 1993.
- [8] GNU Science Library, <http://www.gnu.org/software/gsl/>