

パーティクルフィルタによる多峰性事後確率分布からの MAP 推定手法の比較と検討

○有田 裕太 (九州工業大学) 森田 賢 (九州工業大学) 西田 健 (九州工業大学)

Comparison and examination of MAP estimation methods of particle filter for multimodal posteriori probability distributions

○ Arita Yuta(Kyutech), Morita Masaru(Kyutech) and Nishida Takeshi(Kyutech)

Abstract: Particle filters (PFs) are applicable to state estimation for non-linear and non-gaussian models. On the other hand, in order to use the estimation results of the PFs for a control system, we need a point estimation value, however estimation precision will change significantly. Although, several point estimation methods have been proposed, these characteristics and performances are not compared and are not clear. In this paper, the compare and consider are done by some point estimation methods using several bench models.

1. 緒言

逐次モンテカルロ法に基づく粒子フィルタ (PF: particle filter) [1] は非線形, 非ガウスモデルに適用可能であり, 多峰性確率分布を近似することが可能である. その推定の頑健性から, 移動ロボットの自己位置推定や, ノイズの多い動画像からの対象物の追跡などに広く用いられている. 一方で, PF により推定されたフィルタ分布から唯一の値の抽出, すなわち点推定には複数の手法が提案されている. 粒子の重み付き平均により容易に算出できることから, 最小平均二乗誤差 (MMSE: minimum mean square estimation) 推定が最も広く用いられる. しかし, 多峰性事後確率分布に対する MMSE 推定は峰の谷の値となる場合があるため, そのような状況の点推定には MAP (maximum a posteriori) 推定を用いる必要がある. 計算量が増大するものの, MAP 推定は MMSE 推定よりも高精度の推定値を与え, 先行研究として Viterbi アルゴリズムを用いる手法, モンテカルロ積分を用いて近似する手法などが提案されている.

現在まで提案されている点推定手法には, 計算コストと推定精度のトレードオフや, 事後確率分布の形状に応じた推定精度の変化があるため, 状況に応じた使い分けが必要である. しかし, 推定対象と点推定手法の組み合わせや特性について比較検討を行った研究は見当たらない. そこで本研究では, 数種類の点推定手法と対象モデルの組み合わせによって推定特性の比較と検討を行い, 各種の状況に応じて適切な点推定手法が異なることを示す.

本論文の構成は次の通りである. まず, 2. 節において PF のアルゴリズムや従来より提案されている点推定手法について概説し, 3. 節でシミュレーションにより各推定手法の比較を行う. 最後に本研究による結論

を述べる.

2. 点推定手法の概説

2.1 パーティクルフィルタ

状態と観測の時系列を

$$\mathbf{y}_{1:k} \triangleq \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_{1:k} \triangleq \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\} \quad (2)$$

と表し, 離散時間を $k = 0, 1, 2, \dots$ で表す. 本研究では, 以下のシステムモデルと観測モデルで表現されるシステムを対象とする.

$$\mathbf{x}_k \sim f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_k \sim h(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \quad (4)$$

また, システムのマルコフ性を仮定し,

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{1:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (5)$$

とする. さらに, 観測 \mathbf{y}_k の確率分布は状態 \mathbf{x}_k により定まるとし,

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = h(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \quad (6)$$

とする. これらに従うと, 確率連鎖とベイズ則の適用により,

$$p(\mathbf{x}_{1:k} | \mathbf{y}_{1:k}) \propto \prod_{i=1}^k f(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}) h(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) \quad (7)$$

および,

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \frac{f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) h(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}$$

を得る.

PF は予測分布とフィルタ分布を粒子と重みを用いて表現する。現時点を k とし、一時刻前 $k-1$ までの状態を重み付き粒子群によって次のように近似する。

$$\left\{ \left(\mathbf{x}_{k-1}^{(m)}, \pi_{k-1}^{(m)} \right) \right\}_{m=1}^M \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \quad (8)$$

ここで、 M は粒子の数、 m は粒子の番号を示す。

これを得る処理を逐次更新するために、まず、時刻 k の粒子を提案分布 $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ から生成する。提案分布は、

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = q(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) \quad (9)$$

のように分解でき、 $\hat{\mathbf{x}}_k^{(m)}$ を

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(m)} \sim q(\hat{\mathbf{x}}_k^{(m)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(m)}) \quad (\forall m) \quad (10)$$

のように生成する。重みは事後分布と提案分布との比で

$$\pi_k \triangleq \pi_k(\mathbf{x}_k) \propto \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})} \quad (11)$$

と定義する。重みの更新は

$$\pi_k^{(m)} \propto \pi_{k-1}^{(m)} \frac{f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) h(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k})} \quad (12)$$

と行う。本研究では、提案分布 $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$ にシステムモデル $f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ を用いることにより、重みの更新式 (12) は

$$\pi_k^{(m)} \propto \pi_{k-1}^{(m)} h(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \quad (13)$$

と変形できる。これはモンテカルロフィルタと呼ばれる。

リサンプリングは重みの更新の後に粒子を重みに従って粒子を復元抽出する手順である。リサンプリングのアルゴリズムにはいくつか種類があるが、本研究ではルーレット法に基づくリサンプリング手法を用いる。ルーレット法では、粒子 m を選ぶ確率 $p_k^{(m)}$ を重み $\pi_k^{(m)}$ を用いて、

$$p_k^{(m)} = \frac{\pi_k^{(m)}}{\sum_{m=1}^M \pi_k^{(m)}} \quad (14)$$

と定める。

一方、リサンプリングによりモンテカルロ誤差が生じるため、粒子間で重みが大きくばらついている場合のみ実行すれば良い。また、リサンプリングには乱数生成などの処理に時間がかかるため、必要な状況のみ行うのが望ましい。そこで、粒子の利用の度合いを判断するための指標として、以下の有効サンプリングサイズ (ESS: effective sampling size) を用いる [2]。

$$ESS = \frac{1}{\sum_{m=1}^M (\pi_k^{(m)})^2} \quad (15)$$

全粒子の重みが均等であれば $ESS = M$ 、一つの粒子のみが重みを持つ場合には $ESS = 1$ となる。したがって、 ESS の値に適当に閾値を決め、それを下回るときにのみリサンプリングを行う。

2.2 MMSE 推定

MMSE 推定は、事後確率分布の期待値を推定値とする方法であり、以下のように求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{\text{MMSE}} &= \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}\} = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \\ &\sim \sum_m \pi_k^{(m)} \mathbf{x}_k^{(m)} \end{aligned} \quad (16)$$

推定のための計算量は少なく、推定対象の確率分布がガウス分布である場合には精度良く機能する。点推定の値の時間推移も安定的に推移するため、多くの応用では MMSE 推定が用いられる。

2.3 EP-VGMMAP 推定法

複数の観測を持つ場合やシステムが強い非線形性を持つ状態推定において多峰性事後分布が発生する場合には、点推定を MAP 推定によって行うのが望ましい。

まず、MAP の系列は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{x}_{1:k}^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}_{1:k}} p(\mathbf{x}_{1:k} | \mathbf{y}_{1:k})$$

また、MAP 系列の推定は、式 (7) より以下のように記述できる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{1:k}^{\text{MAP}} &= \arg \max_{\mathbf{x}_{1:k} \in \bigoplus_{i=1}^k \{\mathbf{x}_i^{(m)} | \forall m\}} \\ &\quad \sum_{i=1}^k [\log h(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) + \log f(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1})] \end{aligned}$$

ここで、

$$\hat{\mathbf{x}}_{1:k}^{\text{MAP}} \triangleq [\hat{\mathbf{x}}_1^{\text{MAP}}, \hat{\mathbf{x}}_2^{\text{MAP}}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_k^{\text{MAP}}]^T$$

である。この推定を実行するために、動的計画手法としてよく知られる Viterbi アルゴリズムを用いる EP-VGM (end point-ViterbiGodsill) MAP 推定手法 [3] がある。

各時刻 $l \in \{1, \dots, k\}$ における PF の近似に対して、このアルゴリズムの計算オーダは $O(M^2 l)$ であり、必要なメモリのオーダは $O(Ml)$ である。全時刻における点推定の経緯ではなく、 $\mathbf{x}_{l-p+2:l+1}^{\text{MAP}}$ のみが必要な場合には、計算オーダは $O(Mp)$ 、必要なメモリのオーダは $O(M^2)$ であり、この場合には計算量は一定となる。

2.4 pf-MAP 推定

pf-MAP 推定はモンテカルロ積分により最大事後確率推定を行う手法 [4] である。

まず、時刻 k における MAP 推定は次のように表せる。

$$\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \quad (17)$$

また、ベイズの定理より

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \propto p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (18)$$

と表せる。したがって式(17)は次のように変形できる。

$$\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (19)$$

尤度 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ はそれぞれの \mathbf{x}_k について計算可能なので、MAP を計算する主な問題は予測分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ の計算である。PF の手続きにより、 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ はモンテカルロ積分を用いて、

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \approx \sum_m p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(m)}) \pi_{k-1}^{(m)} \quad (20)$$

と近似できる。よって、式(19)と式(20)より、

$$\mathbf{x}_k^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}_k^{(m)}} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(m)}) \sum_i p(\mathbf{x}_k^{(m)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \pi_{k-1}^{(i)}$$

を得る。

2.5 点推定手法の特性と選択

前述の MMSE 推定は、全粒子の重み付き平均により内挿計算を行う点推定法と見なすことができるのに対して、各種 MAP 推定法は各時刻における唯一の粒子を選択する手法である。推定対象が単峰性分布であれば、前者は比較的少数の粒子であってもそれらが適切に分布していれば高精度の推定が得られるが、粒子数が十分でない場合に後者は真の MAP の値周辺で推定が振動する。一方で、多峰性分布に対して MMSE 推定は適切な推定とならないことは前述の通りであり MAP 推定の適用が重要である。

EP-VGMMAP 推定法は、現在までの全時間区間の MAP 系列情報を用いる手法として定式化されており、実用的にはある時間区間 l の情報を用いる。粒子はリサンプリングによって再配置されることがあり、また、その数は一般に膨大であるため、全ての粒子の全時系列情報を継続して記憶することは困難である。また一定時間の推定結果を利用するため即応性は低い。

これに対して、pf-MAP 推定法は前時刻の粒子分布のみを参照する手法であるため、即応性が高く計算量の観点からも優れている。しかし、事後確率分布が期せずして短時間のうちに大きく変動する場合には、推定が振動的に推移する。

以上より、推定対象とするシステムの性質や許容される計算量やメモリに応じて、最適な MAP 推定法を構築する必要があることが分かる。

3. シミュレーション

事後確率分布が多峰性となるような条件において各推定方法を用いて状態推定を行う。本研究では事後確率分布が多峰性となるようなモデルについて状態推定を行うシミュレーションを行い、MMSE、最大重みを有する粒子を推定値とする手法 (MW : max weight)、EP-VGM, pf-MAP の 4 つの点推定手法との精度比較を行った。

3.1 線形-マルチセンサモデル

次に示す線形モデルを用いる。また、センサーが複数あることを想定し、観測モデルを 3 つ用意する。

$$x_k = x_{k-1} + \omega_k, \quad \omega_k \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (21)$$

$$y_{1,k} = x_k + v_{1,k}, \quad v_{1,k} \sim \mathcal{N}(b_1, \sigma_{1,o}^2) \quad (22)$$

$$y_{2,k} = x_k + v_{2,k}, \quad v_{2,k} \sim \mathcal{N}(b_2, \sigma_{2,o}^2) \quad (23)$$

$$y_{3,k} = x_k + v_{3,k}, \quad v_{3,k} \sim \mathcal{N}(b_3, \sigma_{3,o}^2) \quad (24)$$

ここで、PF が利用する事前知識は、

$$\sigma_{1,o}^2 = \sigma_{2,o}^2 = \sigma_{3,o}^2 = 2.0 \quad (25)$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0.0 \quad (26)$$

である。しかしシミュレーションでは以下のように 3 つの観測のうち 1 つに事前知識とは異なるバイアスをもつノイズを発生させる。

$$b_3 = 5.5 \quad (27)$$

また、1 サンプリング時刻に複数の観測信号を用いるための PF の尤度計算の処理手順を示す。複数の観測からの尤度計算の方法にはそれぞれの観測からの尤度を掛け合わせる手法と尤度を足す手法がある。本研究では、それぞれの観測からの尤度を足す手法を用いる。すなわち、

$$p(\mathbf{y}_{1,k}, \mathbf{y}_{2,k}, \mathbf{y}_{3,k} | \mathbf{x}_k^{(m)}) \propto \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x}_k^{(m)} - \mathbf{y}_{1,k})^2}{2\sigma_{1,o}^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x}_k^{(m)} - \mathbf{y}_{2,k})^2}{2\sigma_{2,o}^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x}_k^{(m)} - \mathbf{y}_{3,k})^2}{2\sigma_{3,o}^2} \right\} \quad (28)$$

とした。

以上の条件のもとで各推定方法によって状態推定を行った。真値と観測値のグラフを Fig.1 に示す。また各推定方法による推定結果を Fig.2 から Fig.5 に示す。

Fig.6 に 20 ステップ目のパーティクルの密度分布を示す。また Fig.7 にそのときの各パーティクルの重みを示す。ただし、密度分布のビンの幅は 0.1 とした。

Tab.1 に RMSE の結果を示す。Tab.1 より、このモデルでは EP-VGM による推定結果が最も精度が高い。これはノイズに含まれるバイアスによって事後確率分布が多峰性となることが多いため MMSE 推定では推定値にもバイアスが生じやすいためだと考えられる。

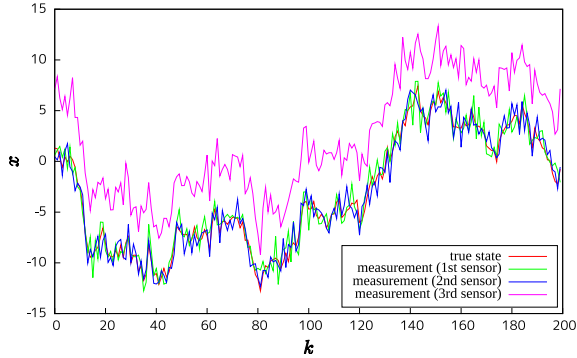


Fig. 1: 真値と観測値 (線形-マルチセンサモデル)

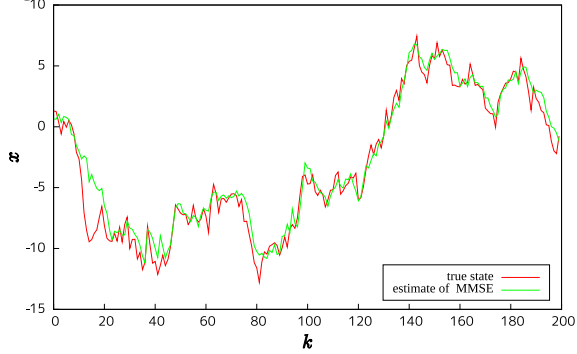


Fig. 2: MMSE による推定結果 (線形-マルチセンサモデル)

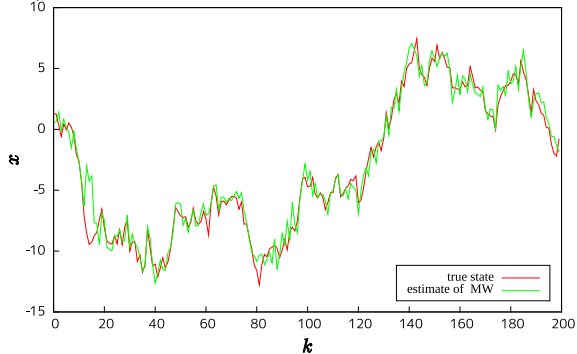


Fig. 3: MW による推定結果 (線形-マルチセンサモデル)

3.2 非線形-マルチセンサモデル

次に、システムモデルが非線形性を持つ場合でセンサが複数あることを想定し、次のような状態空間モデ

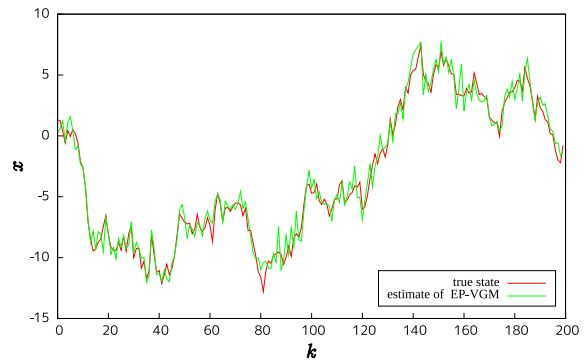


Fig. 4: EP-VGM による推定結果 (線形-マルチセンサモデル)

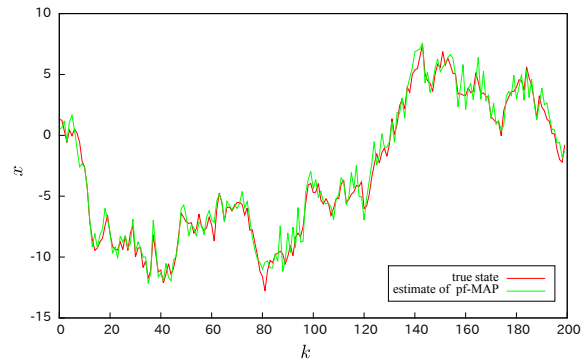


Fig. 5: pf-MAP による推定結果 (線形-マルチセンサモデル)

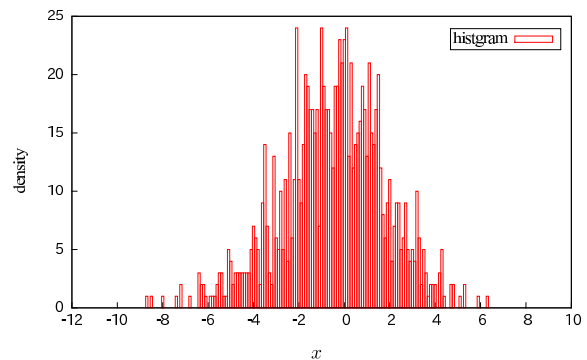


Fig. 6: 20 ステップ目におけるパーティクルの密度分布 (線形-マルチセンサモデル)

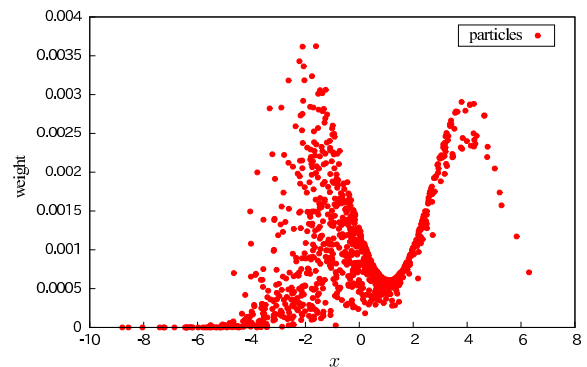


Fig. 7: 20 ステップ目における各パーティクルの重み (線形-マルチセンサモデル)

Table 1: 線形-マルチセンサモデルの RMSE による比較

	MMSE	Max-Weight	EP-VGM	pf-MAP
M	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
100	1.45429	1.34827	1.34671	1.43789
200	1.44715	1.38627	1.40158	1.45044
400	1.45181	1.36571	1.37198	1.45044
1000	1.47037	1.37559	1.37907	1.44794

ルを用いる.

$$x_k = 3 \cos(x_{k-1}) + \omega_k \quad (29)$$

$$y_{1,k} = x_k + v_{1,k}, \quad v_{1,k} \sim \mathcal{N}(b_1, \sigma_{1,o}^2) \quad (30)$$

$$y_{2,k} = x_k + v_{2,k}, \quad v_{2,k} \sim \mathcal{N}(b_2, \sigma_{2,o}^2) \quad (31)$$

$$y_{3,k} = x_k + v_{3,k}, \quad v_{3,k} \sim \mathcal{N}(b_3, \sigma_{3,o}^2) \quad (32)$$

ここで, PF が利用する事前知識は線形モデルのときと同様に,

$$\sigma_{1,o}^2 = \sigma_{2,o}^2 = \sigma_{3,o}^2 = 2.0 \quad (33)$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0.0 \quad (34)$$

とした. また, シミュレーションでは以下のように3つの観測のうち1つに事前知識とは異なるバイアスをもつノイズを発生させる.

$$b_3 = 5.5 \quad (35)$$

また, 尤度計算は3.1項と同様にした. 以上の条件のもとで各推定方法によって状態推定を行った. 真値と観測値のグラフを Fig.8 に示す. また各推定方法による推定結果を Fig.9 から Fig.12 に示す. Fig.13 に37ステップ目のパーティクルの密度分布を示す. また Fig.14 にそのときの各パーティクルの重みを示す. ただし, 密度分布のビンの幅は0.1とした. 3.1項と同様に Tab.2 に RMSE の結果を示す. 図9を見ると, MMSE 推定では観測ノイズに混入させたバイアスによって推定値が引きずられていることが分かる. 一方, MAP 推定手法においてはバイアスに引きずられることなく推定ができている. しかし, MAP 推定では観測値に敏感に反応している.

4. まとめ

本研究では多峰性事後確率分布から適切な推定値を取り出す方法として, これまで提案されている手法について説明し, 事後確率分布が多峰性となるモデルに対してシミュレーションを行い, RMSE を用いて精度の検証を行った. その結果, 事後確率分布が多峰性となる場合には MAP 推定の方が精度が高いことを示した. しかし, モデルによって最も精度の良い MAP 推定

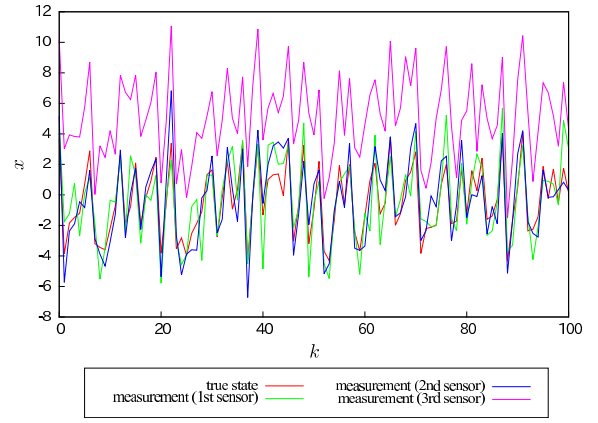


Fig. 8: 真値と観測値 (非線形-マルチセンサモデル)

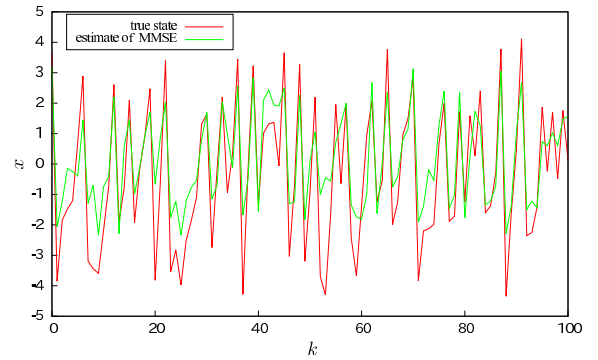


Fig. 9: MMSE による推定結果 (非線形-マルチセンサモデル)

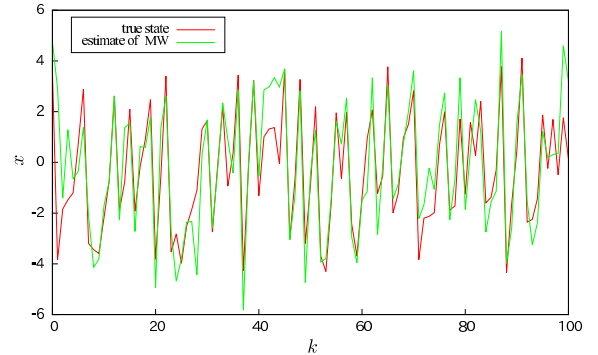


Fig. 10: MW による推定結果 (非線形-マルチセンサモデル)

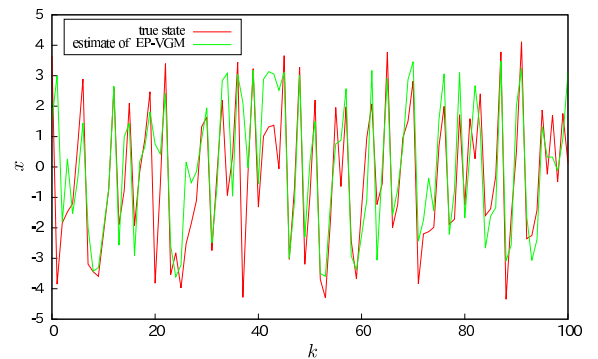


Fig. 11: EP-VGM による推定結果 (非線形-マルチセンサモデル)

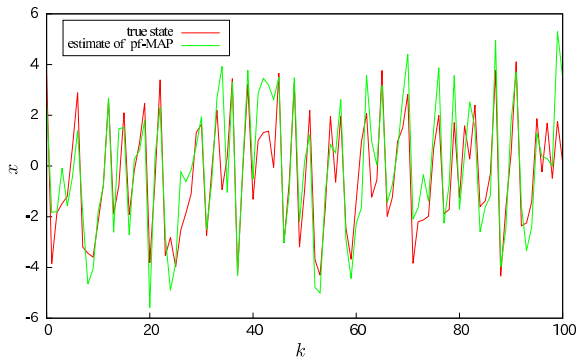


Fig. 12: pf-MAP による推定結果 (非線形-マルチセンサモデル)

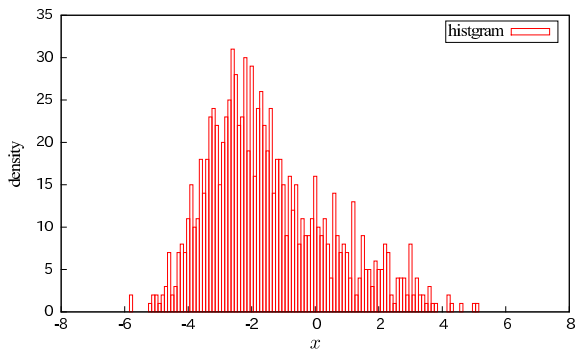


Fig. 13: 37 ステップ目におけるパーティクルの密度分布 (非線形-マルチセンサモデル)

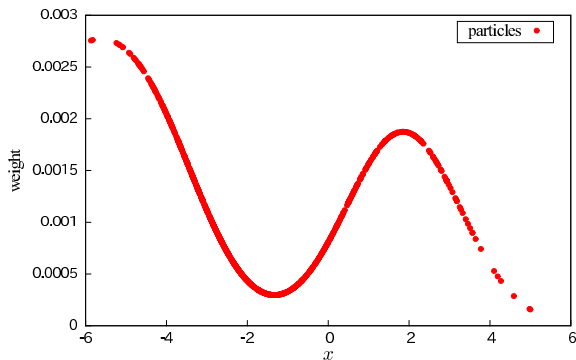


Fig. 14: 37 ステップ目における各パーティクルの重み (非線形-マルチセンサモデル)

Table 2: 非線形-マルチセンサモデルの RMSE による比較

	MMSE	Max-Weight	EP-VGM	pf-MAP
M	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
100	1.45353	1.52675	1.47627	1.39176
200	1.42603	1.43396	1.47847	1.36503
400	1.39621	1.47933	1.40726	1.40057
1000	1.40761	1.44669	1.43882	1.38177

手法は異なり、単純に重みの最も大きなパーティクルを推定値とする手法はいずれのモデルに対しても有効な手法とならなかった。従って、最も良い精度を出すためにはそのシステムに対して適切な MAP 推定手法を選択する必要がある。システムモデルが非線形を有し、システムモデルによる粒子の遷移がシステムノイズより大きい場合、すなわち、状態遷移にシステムモデルが支配的に働く場合には MMSE 推定よりも MAP 推定が有効であると考えられる。

一方で、事後確率分布が単峰性となる場合には MMSE 推定の方が良い。これは、MAP 推定の場合推定値があるパーティクルの値しか取れないが MMSE 推定の場合にはそれを回避することができるからである。

今後の展望として、高次元の状態推定問題への応用や、実際のセンサを用いた実験を行い、有効性を検証することが挙げられる。

参考文献

- [1] S.Thrun, W.Burgard, and D.Fox, “Probabilistic Robotics”, MIT Press, 2005.
- [2] Arnaud Doucet, Nando de Freitas, Neil Gordon, “Statistics for Engineering and Information Science – Sequential Monte Carlo Methods in Practice”, Springer, pp.333-334, 2001.
- [3] Simon Godsill, Arnaud Doucet, Mike West, Maximum a posteriori sequence estimation using monte carlo particle filters, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 53, Issue 1, pp. 82-96.
- [4] Saha, S.; Boers, Y.; Driessen, H.; Mandal, P.K.; Bagchi, A., “Particle based MAP state estimation: A comparison, ” Information Fusion, 2009. FUSION '09. 12th International Conference on , vol., no., pp.278, 283, 6-9 July 2009