

第10回 フィードバック制御 (2)

特性方程式は次のような代数方程式で表すことができる.

$$s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

安定性を判定したい



根の実部が負かどうかを調べる



ラウス・フルビッツの安定条件を使う

ラウス・フルビッツの安定条件

- (1) $a_i > 0$ ($\forall i$)
- (2) ラウス表の最左端に並ぶ係数がすべて正となること.

10.1 ラウス・フルビッツの安定判別法

(1) $a_i > 0 \ (\forall i)$

↓

ラウス表

第0行	a_0	a_2	a_4	...
第1行	a_1	a_3	a_5	...
第2行	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...
第3行	a_{41}	a_{42}	a_{43}	...
⋮	⋮			
第n行	a_{n1}			

↑

(2) ラウス表の最左端に並ぶ
係数がすべて正となること。

$$a_{31} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = -\frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_1}$$

$$a_{32} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix} = -\frac{a_0 a_5 - a_1 a_4}{a_1}$$

$$a_{41} = -\frac{1}{a_{31}} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\frac{a_1 a_{32} - a_{31} a_3}{a_{31}}$$

$$a_{42} = -\frac{1}{a_{31}} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\frac{a_1 a_{33} - a_{31} a_5}{a_{31}}$$

例題 1) 特性方程式が次式で与えられるシステムの安定性を判定せよ

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 6s + 2 = 0$$

第0行	1	8	6
第1行	4	9	2
第2行	$\frac{23}{4}$	$\frac{22}{4}$	0
第3行	$\frac{119}{23}$	2	0
第4行	$\frac{390}{119}$	0	0
第5行	2	0	0

(1) $a_i > 0 \ (\forall i)$

(2) ラウス表の最左端に並ぶ係数がすべて正



システムは安定

例題 1) 特性方程式が次式で与えられるシステムの安定性を判定せよ

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 6s + 2 = 0$$

1 任意の行の要素に正の数に乗じて、数列の符号は変化しない.

第0行	1	8	6
第1行	4	9	2
第2行	23	22	0
第3行	119	46	0
第4行	390	0	0
第5行	46	0	0

2 ある行の要素がすべて0となるような場合は、システムは安定ではない.

2 ある行 (第 i 行) の要素がすべて0となるような場合

第 $i - 1$ 行要素からなる多項式

$$f_i(s) = a_{i-1,1}s^{n-i+2} + a_{i-1,2}s^{n-i} + a_{i-1,3}s^{n-i-2} + \dots$$

を作り, これを s で微分した

$$\frac{df_{i-1}(s)}{ds} = (n - i + 2)a_{i-1,1}s^{n-i+1} + (n - i)a_{i-1,2}s^{n-i-1} + \dots$$

なる多項式の係数を第 i 行の要素として用いる.

$f_{i-1}(s) = 0$: 補助方程式. この根は特性方程式の根と等しい.

この根は必ず対を為し, 反対符号を持つ.

ある行の要素がすべて0となるような場合は, そのシステムは安定でない.

例題 2) 特性方程式が次式で与えられるシステムの安定性を判定せよ

$$s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 8s + 12 = 0$$

$$f_3(s) = s^2 + 4$$

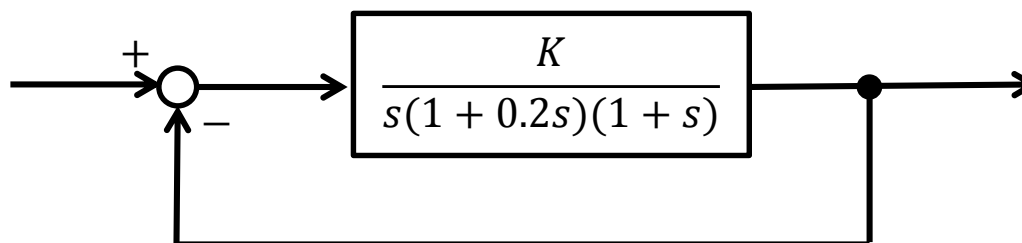
$$\frac{df_3(s)}{ds} = 2s$$

第0行	1	7	12	
第1行	1	4	0	← $\frac{1}{2}$ を掛けた
第2行	1	4	0	← $\frac{1}{3}$ を掛けた
第3行	0	0	0	← すべての要素が0になる

第0行	1	7	12	
第1行	1	4	0	← $\frac{1}{2}$ を掛けた
第2行	1	4	0	← $\frac{1}{3}$ を掛けた
第3行	2	0	0	← 要素を置き換える
第4行	4	0	0	

$f_3(s) = s^2 + 4 = 0$
 の根は $\pm j2$ (安定限界)

例題 3) このフィードバック制御系が安定に動作するためのゲイン K の範囲を求めよ



特性方程式 : $1 + \frac{K}{s(1 + 0.2s)(1 + s)} = 0$

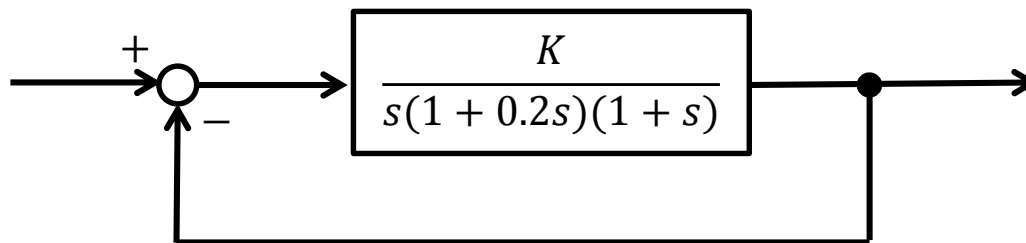


代数方程式 : $s(1 + 0.2s)(1 + s) + K = 0.2s^3 + 1.2s^2 + s + K = 0$




$$s^3 + 6s^2 + 5s + 5K = 0$$

例題 3) このフィードバック制御系が安定に動作するためのゲイン K の範囲を求めよ



$$s^3 + 6s^2 + 5s + 5K = 0$$



第0行	1	5	安定に動作するための条件は
第1行	6	$5K$	
第2行	$30 - 5K$	0	$30 - 5K > 0, \quad K > 0$  $0 < K < 6$
第3行	$5K$	0	