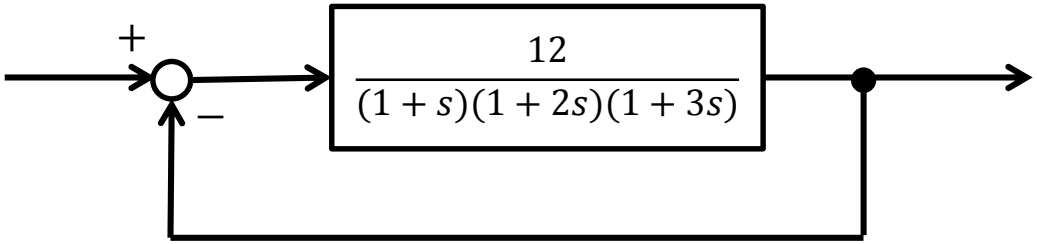
第11回 フィードバック制御（3）

１１．１　ナイキストの安定判別法

例題４）　このフィードバック制御系の安定性を判別せよ



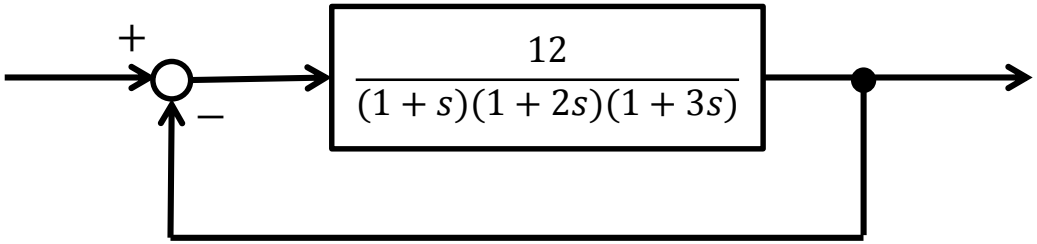
$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{12(1-11\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)}$$

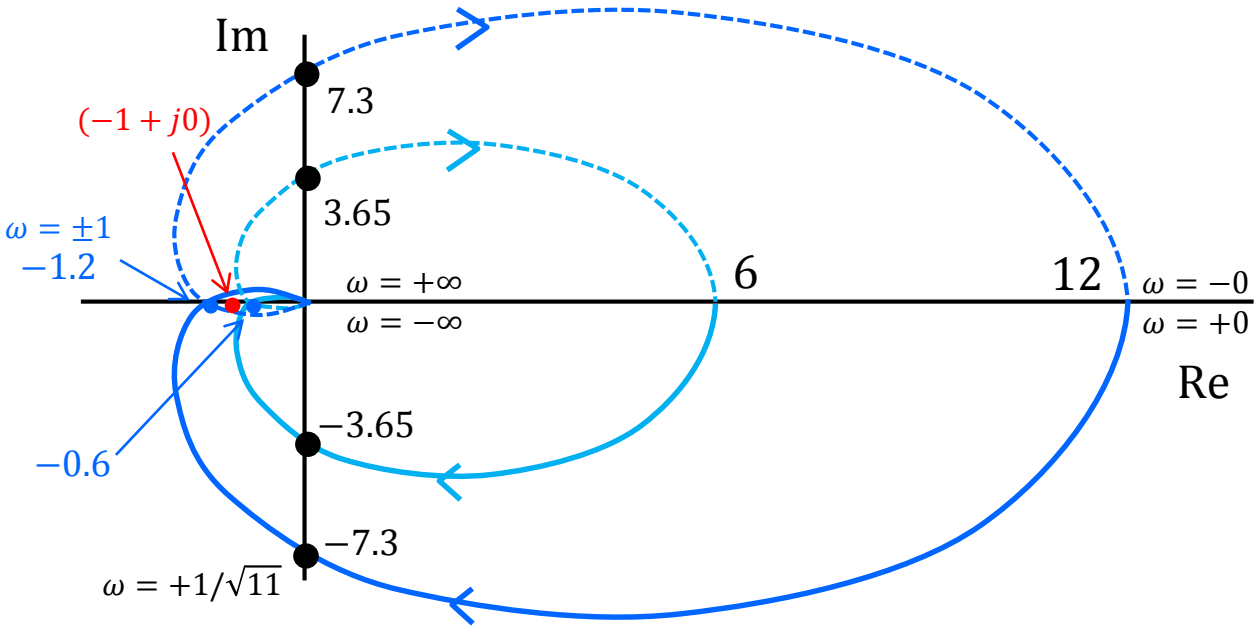
$$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{-12\omega(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)}$$

$\omega = \pm 0$	$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = 12,$	$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \mp 0$
$\omega = \pm\sqrt{1/11}$	$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = 0,$	$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \mp 7.30$
$\omega = \pm 1$	$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = -1.2,$	$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = 0$
$\omega = \pm\infty$	$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = -0,$	$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \pm 0$

１１．１　ナイキストの安定判別法

例題４）　このフィードバック制御系の安定性を判別せよ



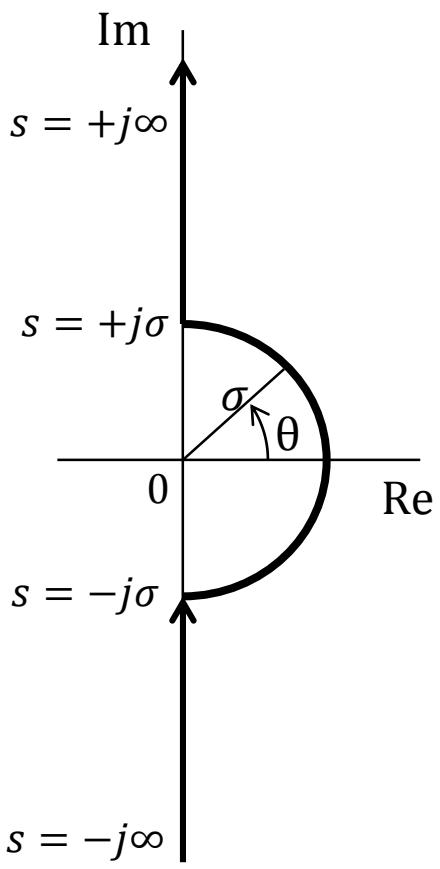


1. ベクトル軌跡は$\omega=\pm1$で実軸と交わる．この時の値は-1.2
2. $\omega=-\infty\sim+\infty$ に対して時計回りに$(-1+j0)$を2回転
$$N=-2$$
3. 開ループ伝達関数の極は全て左半平面にある
$$P=0$$
4. $N\neq P$ で不安定
5. 例えばゲインを$12\rightarrow6$と変更すれば安定になる

１１．１　ナイキストの安定判別法

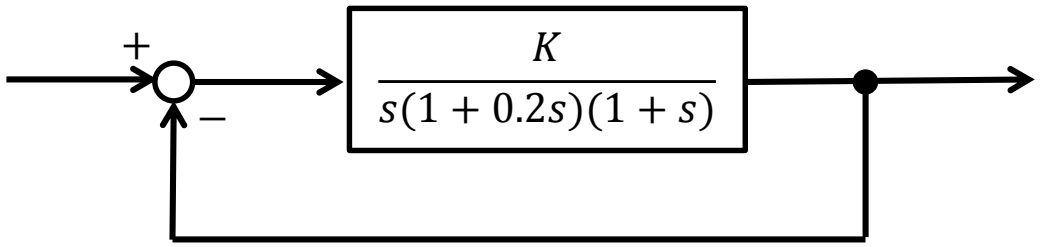
極が虚軸上に存在する場合

- 虚軸上の極に対して半径が無限小の半円で避けて通るような境界を考える
- 極の右側を避ける経路を想定
- 虚軸上の極はs平面の左半平面に存在するとみなせるのでPの個数に数えない.



１１．１　ナイキストの安定判別法

例題 5） このフィードバック制御系が安定に動作するための
ゲインKの範囲をナイキストの判別法を用いて求めよ



開ループ伝達関数　$G(s) = \dfrac{K}{s(1+0.2s)(1+s)}$

$s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j0.2\omega)(1+j\omega)}$$

$$= \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} + j\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} &= \frac{-1.2K}{(1+(0.2\omega)^2)(1+\omega^2)} \\ \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} &= \frac{-(1-0.2\omega^2)K}{\omega(1+(0.2\omega)^2)(1+\omega^2)} \end{aligned}\right\}$$

１１．１　ナイキストの安定判別法

ベクトル軌跡が実軸と交わるのは

$$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{-(1-0.2\omega^2)K}{\omega(1+(0.2\omega)^2)(1+\omega^2)} = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{5}$$

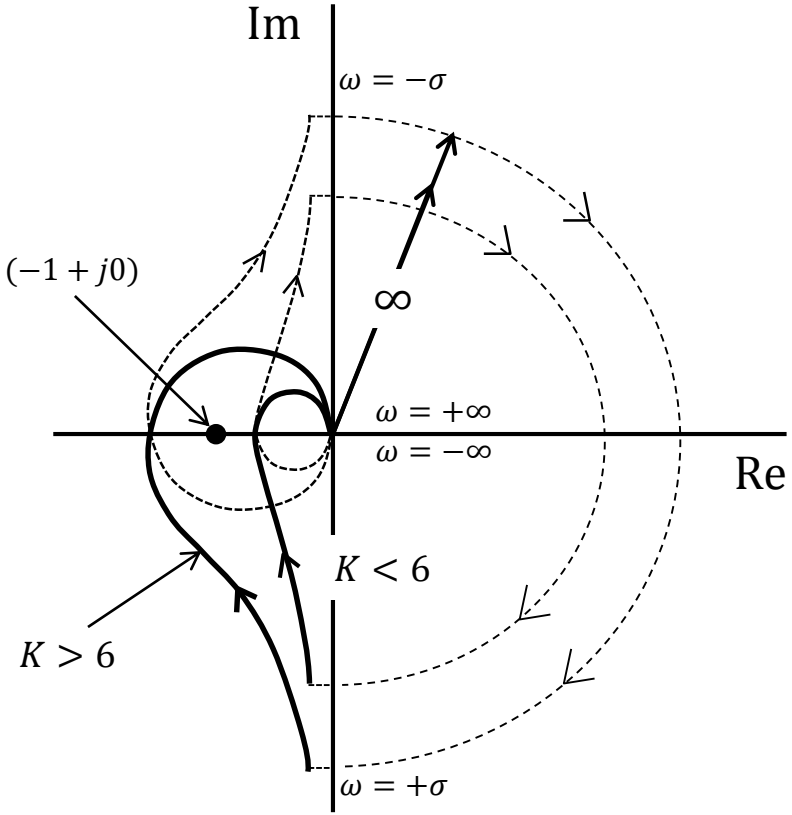
$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = -\frac{K}{6}$$

sが原点の右側を無限小の
半径σの半円に沿って動くときは

$$s = \sigma e^{j\theta};\ \ \sigma \simeq 0$$

であるので，伝達関数は近似的に

$$G(s) \simeq \frac{K}{s} = \frac{K}{\sigma}e^{-j\theta}$$



$K > 6$ の場合には $N = -2$

$K < 6$ の場合には $N = 0$

$$P = 0$$

１１．２　ゲイン余裕・位相余裕

ナイキストの安定判別法に基づき，

- あとどれだけコントローラのゲインを上げられるか
- あとどれだけ位相を遅らせることができるか

という評価を行うための指標.

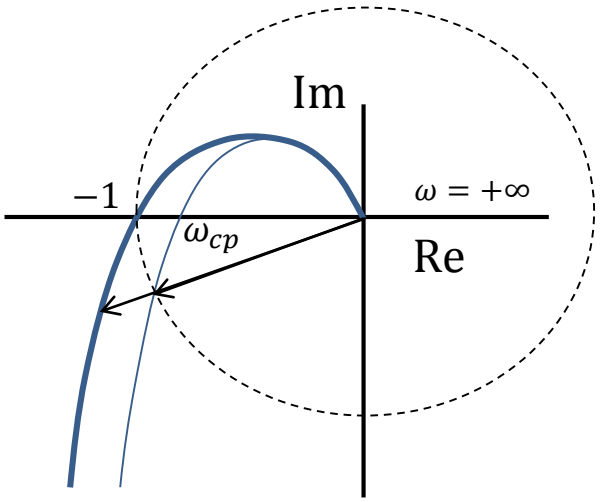
ゲイン余裕と位相余裕が正であるフィードバック系は安定

１１．２　ゲイン余裕・位相余裕

ゲイン余裕

フィードバック系が安定のとき，
開ループ伝達関数$P(s)K(s)$のゲイン線図を考える．
位相が$-180°$を横切るときの周波数（位相交差角周波数）をω_{cp}とし
このときの開ループ伝達関数のゲイン$|P(j\omega_{cp})K(j\omega_{cp})|$を考える．
このときゲイン余裕G_mは，

$$G_m = 20\log_{10}\left(\frac{1}{|P(j\omega_{cp})K(j\omega_{cp})|}\right)$$

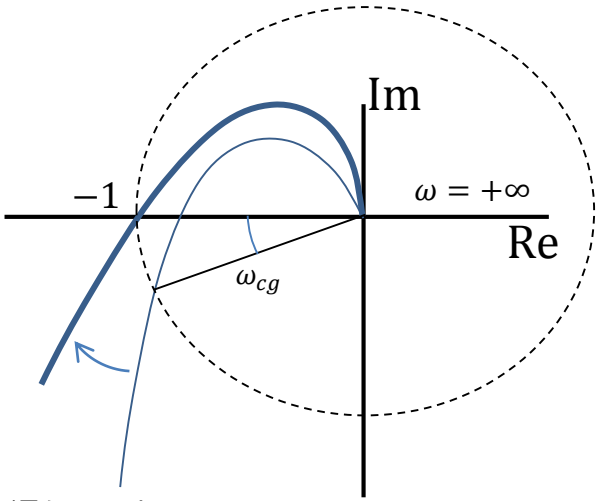


ゲインを大きくすると
ナイキスト線図が変化する

位相余裕

フィードバック系が安定のとき，
開ループ伝達関数$P(s)K(s)$のゲイン線図を考える．
ゲイン線図が0[dB]を横切るときの周波数（ゲイン交差角周波数）
をω_{cg}とすると，位相余裕は

$$P_m = \angle\left(P(j\omega_{cg})K(j\omega_{cg})\right) + 180°$$



位相を遅らせると
ナイキスト線図が変化する

１１．２　ゲイン余裕・位相余裕