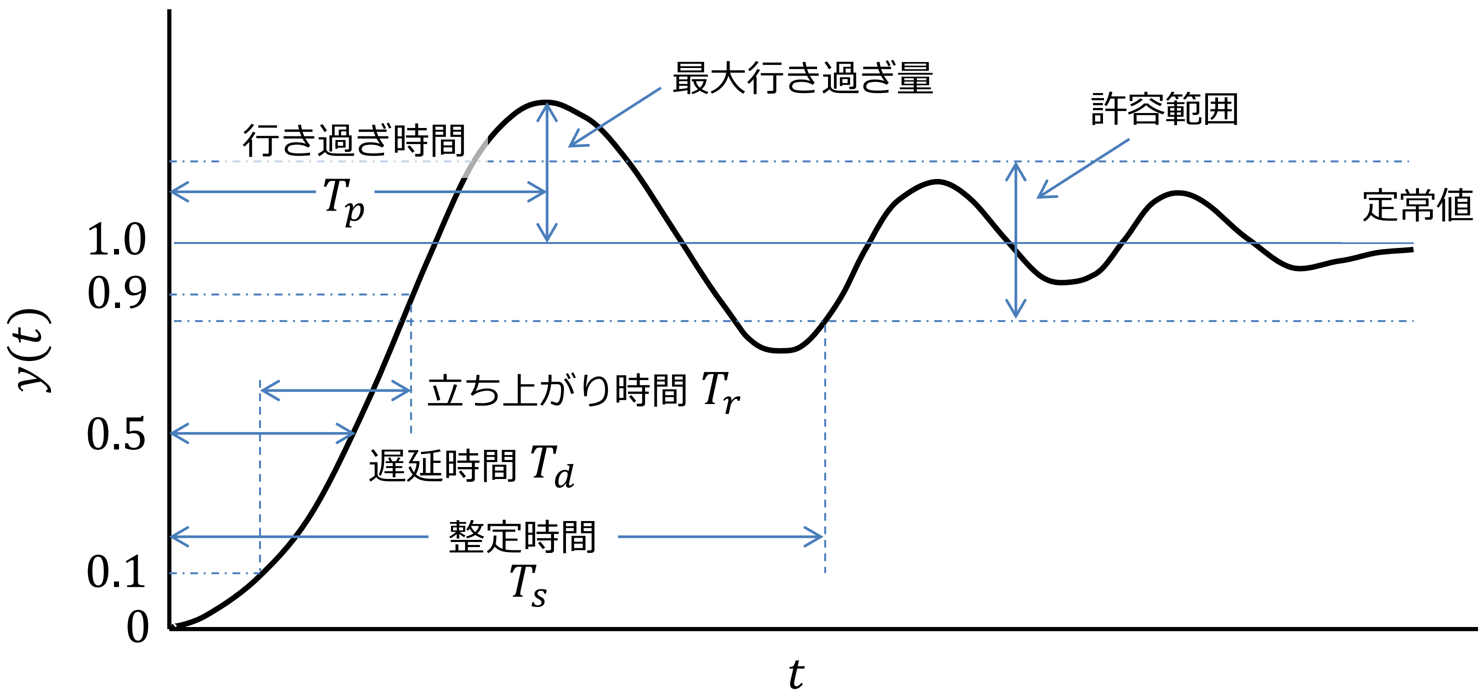
第12回 システムの時間応答（1）

12.1　単位ステップ応答の特性値



立ち上がり時間（rise time）	T_r	応答が定常値の10%から90%に達するまでの時間
遅延時間（delay time）	T_d	応答が定常値の50%に達するまでの時間
整定時間（settling time）	T_s	応答が定常値からの許容範囲（通常は±5%）に収まるまでの時間
行き過ぎ時間（time to peak）	T_p	最大行き過ぎが生ずるまでの時間
最大行き過ぎ量（maximum overshoot）	A_p	応答が定常値を超えてから最初に現われる行き過ぎ量の最大値

12.2　1次系のステップ応答

閉ループ伝達関数 $W(s)$

$$W(s)=\frac{K}{1+Ts}\quad K>0,\quad T>0$$

⇔

制御系の単位ステップ応答

$$y(t)=K\left(1-e^{-t/T}\right)$$

証明

入力 $r(t)$

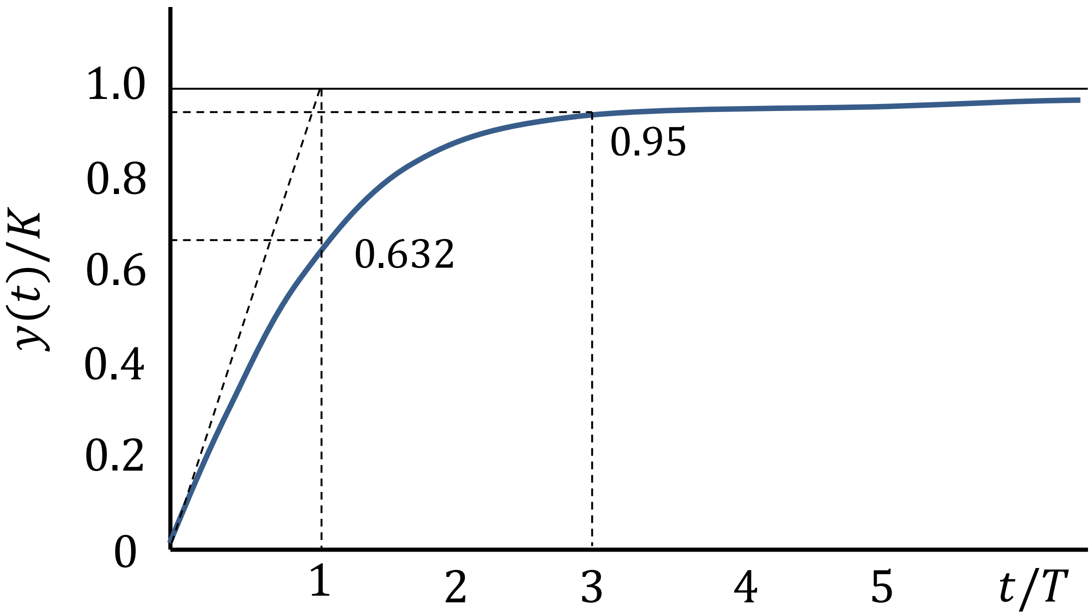
単位ステップ $\mathbb{1}(t)$

とおくと ⇒ $R(s)=\dfrac{1}{s}$

$$Y(s)=\frac{K}{s(1+Ts)}\ \Rightarrow\ Y(s)=K\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/T}\right)\ \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\ y(t)=K\left(1-e^{-t/T}\right)$$

12.2　1次系のステップ応答

T:　時定数



1 $$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{K}{T}e^{-t/T}\right|_{t=0} = \frac{K}{T}$$

$t = 0$ における $y(t)$ の接線が定常値 K と交わる時間

2 $t = T$ で $y(t)$ は定常値 K の63.2%に達する.

3 $t = 3T$ で $y(t)$ は定常値 K の95%に達する.

12.3　2次系のステップ応答

閉ループ伝達関数 $W(s)$　　$W(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$　$\zeta>0$

制御系の単位ステップ応答

① $\zeta>1$　$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\dfrac{\sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n t+\gamma\right)}{\sinh\gamma}$　$\gamma=\tanh^{-1}\dfrac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}$

② $\zeta=1$　$y(t)=1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}$

③ $\zeta<1$　$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\varphi\right)}{\sin\varphi}$　$\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

12.3　2次系のステップ応答

証明

入力 $r(t)$

単位ステップ $\mathbb{1}(t)$

とおくと $R(s) = \dfrac{1}{s}$

出力 $y(t)$ のラプラス変換は

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

この伝達関数の極は $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

$$s_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$s_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

1. $\zeta > 1$ のとき　s_1とs_2はともに負の実根
2. $\zeta = 1$ のとき　s_1とs_2はともに負の等根
3. $\zeta < 1$ のとき　s_1とs_2はともに実部が負の複素共役根

12.3　2次系のステップ応答

証明 ①

$\zeta > 1$ のとき $\begin{aligned} s_1 &= -a \\ s_2 &= -b \end{aligned}$ とおくと $Y(s) = \dfrac{ab}{s(s+a)(s+b)}$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad y(t) = 1 - \frac{1}{b-a}\left(be^{-at} - ae^{-bt}\right)$$

$\begin{aligned} a &= c - d \\ b &= c + d \end{aligned}$ 　$c = \zeta\omega_n$,　$d = \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n$ 　とおくと

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{1}{2d} e^{-ct}\{(c+d)e^{dt} - (c-d)e^{-dt}\} \\ &= 1 - e^{-ct}\left(\frac{c}{d}\,\frac{e^{dt} - e^{-dt}}{2} + \frac{e^{dt} + e^{-dt}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{dt} - e^{-dt}}{2} \triangleq \sinh dt, \quad \frac{e^{dt} + e^{-dt}}{2} \triangleq \cosh dt \qquad \frac{d}{c} = \tanh\gamma \triangleq \frac{\sinh\gamma}{\cosh\gamma}$$

と定義すると

$$y(t) = 1 - e^{-ct}\frac{\sinh dt \cdot \cosh\gamma + \cosh dt \cdot \sinh\gamma}{\sinh\gamma} = 1 - e^{-ct}\frac{\sinh(dt + \gamma)}{\sinh\gamma}$$

$c = \zeta\omega_n$,　$d = \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n$ を代入すると

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\frac{\sinh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t + \gamma\right)}{\sinh\gamma} \qquad \gamma = \tanh^{-1}\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}$$

12.3　2次系のステップ応答

証明 ②

$\zeta = 1$ のとき　$s_1 = s_2 = a$　とおくと　$Y(s) = \dfrac{a^2}{s(s+a)^2}$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad y(t) = 1 - (1 + at)e^{-at}$$

$a = \omega_n$　なので　$y(t) = 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$　■

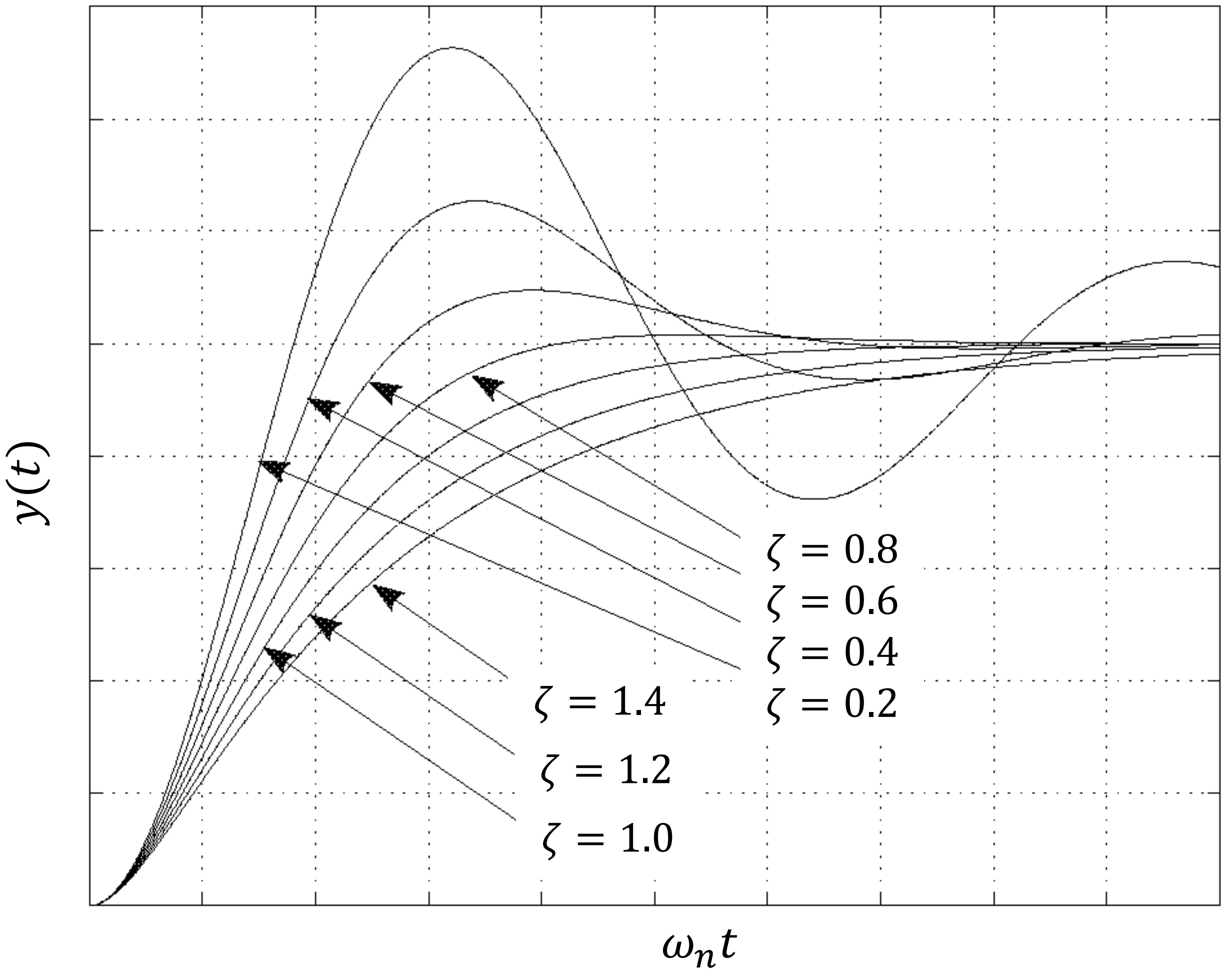
証明 ③

$\zeta < 1$ のとき　$\begin{aligned} s_1 &= -a + jb \\ s_2 &= -a - jb \end{aligned}$　とおくと　$Y(s) = \dfrac{a^2 + b^2}{s\{s^2 + 2ab + (a^2 + b^2)\}}$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad y(t) = 1 - e^{-at}\frac{\sin(bt + \varphi)}{\sin\varphi}; \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$\begin{aligned} a &= \zeta\omega_n \\ b &= \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \end{aligned}$　なので　$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \varphi\right)}{\sin\varphi}$　■

12.3　2次系のステップ応答



- 固有周波数 ω_n は応答時間のスケール（応答の速さ）に関係するが，応答の減衰特性には無関係
- 減衰係数 ζ は応答の減衰特性に関係する

双曲線関数（hyperbolic function）

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y = \sinh(x + y)$$

$$\sinh jx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2} \qquad \cosh jx = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sinh jx = j \sin x \qquad \cosh jx = \cos x \qquad \tanh jx = j\tan x$$

代表特性根（dominant characteristic root）

制御系が高次の場合に，特性評価を代表特性根に着目してなされる場合が多い

閉ループ系の伝達関数 $W(s)$ が高次（3次以上）の場合
ステップ応答を厳密に知ることは一般に面倒

制御系の応答を実質的に支配するのは虚軸に近い応答の遅い根
虚軸から離れた根に基づく過渡応答は速く減衰する

◎ 代表特性根が実根の場合

過渡応答は非振動，絶対値が大きいほど速応性は良好

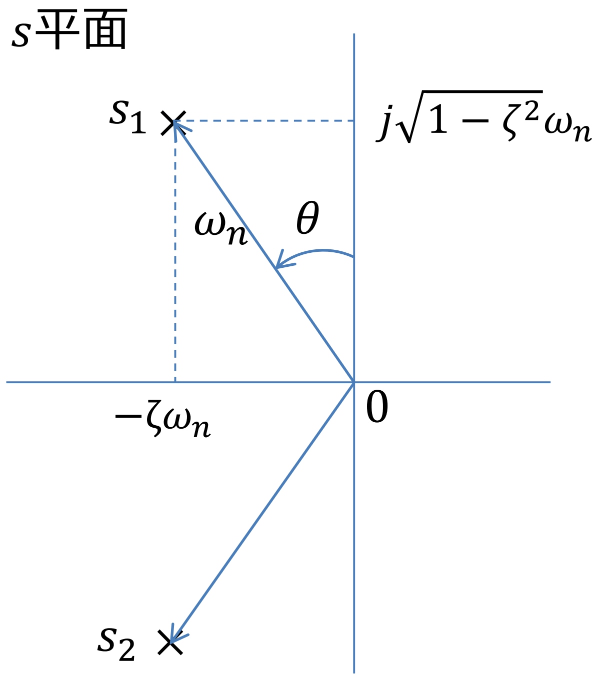
◎ 代表特性根が共役複素根の場合

過渡応答は振動的　$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$

振動成分　$Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \varphi\right)$

$$C = \frac{1}{\sin\varphi} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

12.4　高次系のステップ応答



ω_n:原点から特性根$s_{1,2}$に至るベクトルの長さ

ω_n が大きいほど速応性が高い

ζ: ベクトルと虚軸のなす角θの関係

$$\zeta = \sin\theta$$

ζ が大きいほど振動しない

一般に

サーボ系	$\zeta = 0.5\sim0.8$	$\theta = 30^\circ\sim53^\circ$
プロセス制御系	$\zeta = 0.2\sim0.4$	$\theta = 12^\circ\sim24^\circ$

12.4　高次系のステップ応答

例題　以下の制御系のステップ応答に及ぼす特性根 $-p$ の影響を調べよ.

$$W(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)+K} = \frac{p\omega_n^2}{(s+p)\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}\,;0<\zeta<1$$

特性根

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n,\quad s_3 = -p$$

制御系の単位ステップ応答

$$Y(s) = \frac{p\omega_n^2}{s(s+p)\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

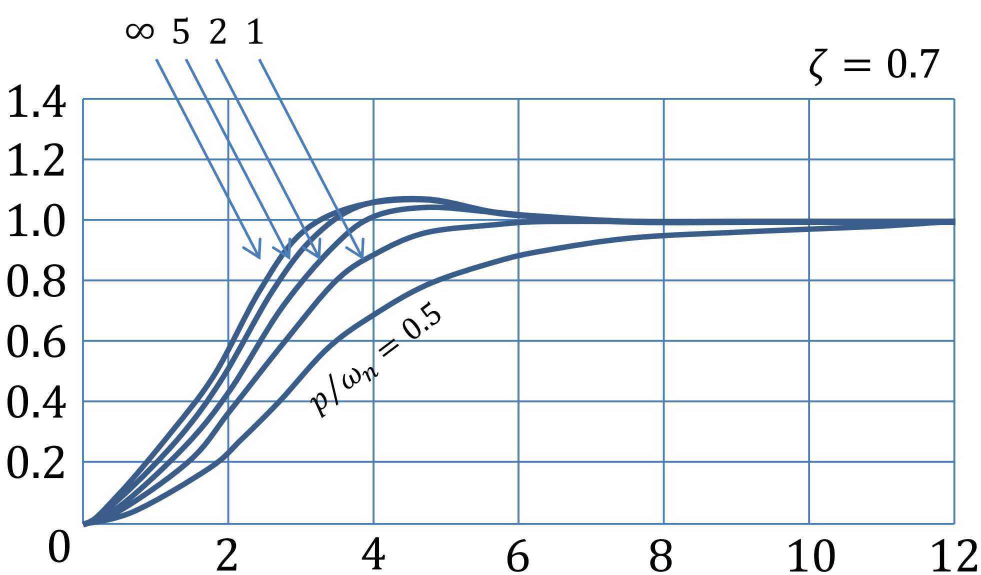
12.4　高次系のステップ応答

例題

時間応答

$$y(t) = 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \frac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \varphi - \theta_p\right)}{\sin\varphi}$$

$$- \frac{\omega_n^2}{p^2 - 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} e^{-pt} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\varphi \quad \theta_p = \tan^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{p - \zeta\omega_n}$$



$p \to \infty$ で $y(t)$ は２次系の単位ステップ応答に近づく

p の値が複素根の実部の大きさの５倍以上（$p > 5\zeta\omega_n$）ならば p の存在を無視しても差し支えない