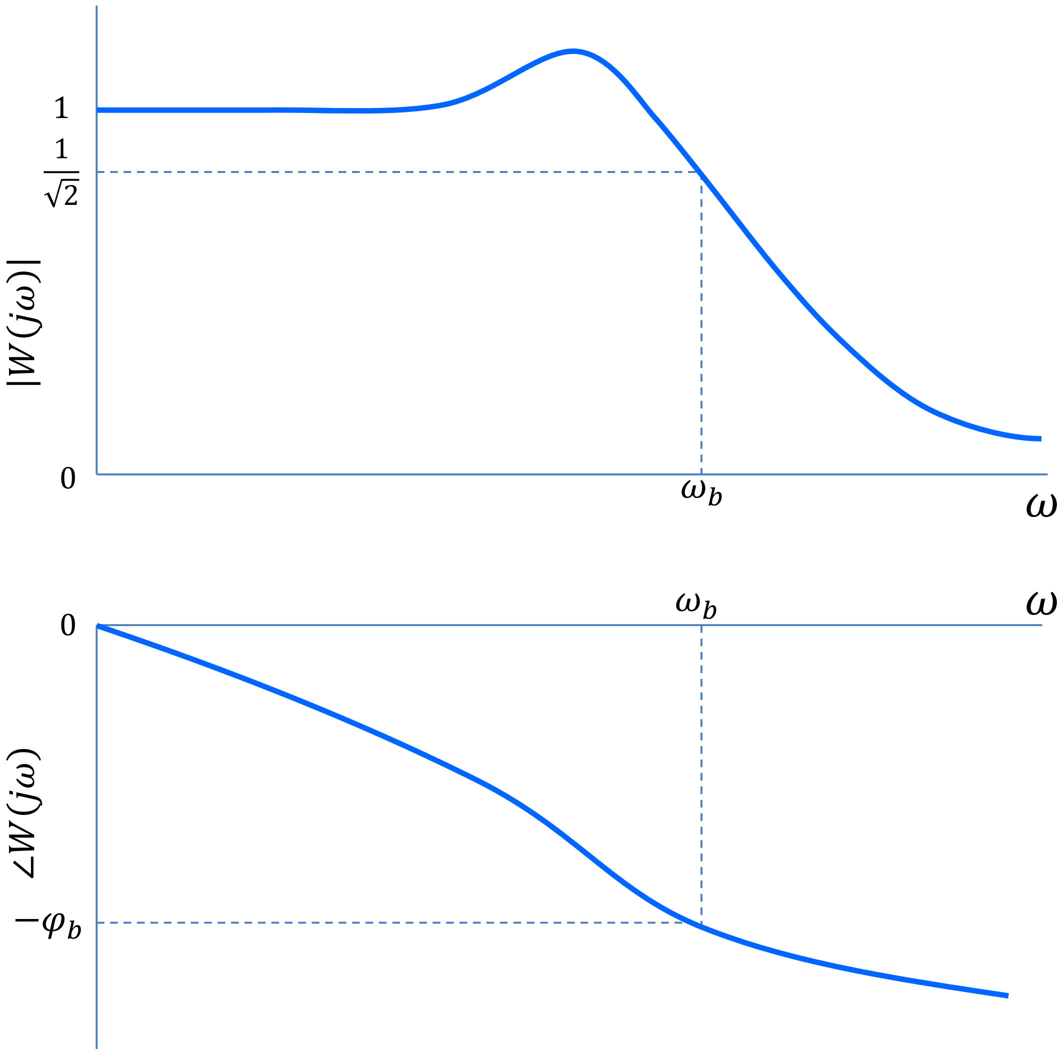
第13回 システムの時間応答（2）

13.1　バンド幅と速応性



一般的な制御系の周波数応答は周波数 ω がある値以上になるとゲインの値が低下する．

ゲインが $\omega = 0$ における値の $1/\sqrt{2}(\cong 0.707)$倍となる周波数 ω_b を制御系のバンド幅とよぶ．

バンド幅が広いほど制御系の応答は速い．

例題　一次遅れ系のバンド幅を求めよ.

$$W(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

一次遅れ系のゲインは　$|W(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$

ω_bは ⇒ $$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_b T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより　$\omega_b T = 1$ ⇒ $$\omega_b = \frac{1}{T}$$

13.1　バンド幅と速応性

例題　二次遅れ系のバンド幅を求めよ.

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

二次遅れ系のゲインは

$$|W(j\omega)| = \left|\frac{\omega_n^2}{(\omega^2 - \omega_n^2) + j2\zeta\omega_n\omega}\right| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

ω_bは

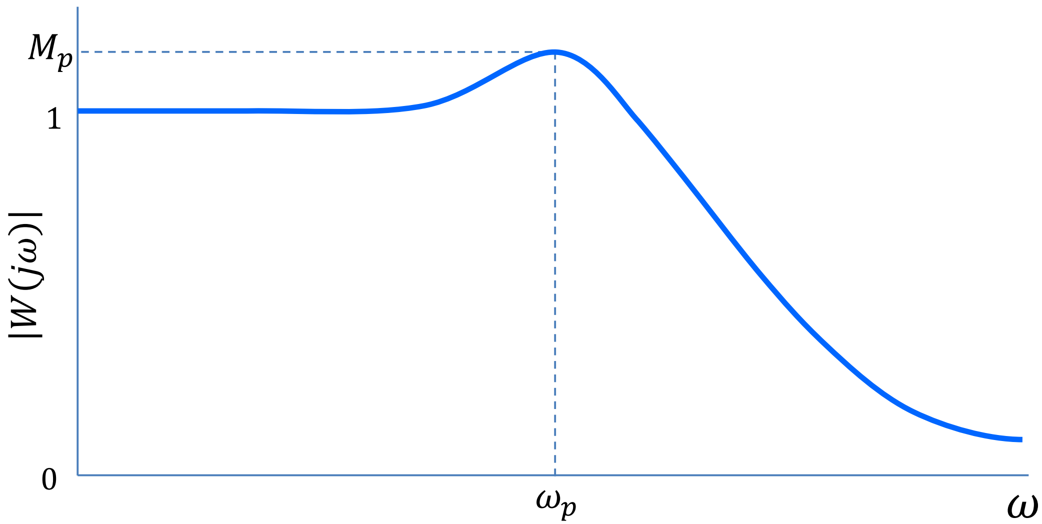
$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{({\omega_b}^2 - \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_b = \left((1 - 2\zeta^2) + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 1}\right)^{1/2} \omega_n$$

- ω_bは ω_n に比例する
- ω_bは ζ に依存する

13.2　共振値と共振周波数

閉ループ周波数応答のゲイン$|W(j\omega)|$が
ある周波数で最大値となるとき
この現象を**共振**（resonance）という．



最大値 M_p ：共振値

- ζ に依存する
- 安定度の尺度

最大値での周波数 ω_p ：共振周波数

- ω_n に依存する
- 速応性の尺度

M_pとω_pの値はニコルス線図と
閉ループ伝達関数の周波数特性から
知ることができる．

共振値 M_p ：1.1～1.3程度が良いとされており
大きすぎると安定度を害する．

共振周波数 ω_p ：大きいほど速応性が向上する．

13.2　共振値と共振周波数

例題　二次の閉ループ伝達関数についてM_pとζの関係，ω_pとω_nの関係を求めよ．

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$|W(j\omega)| = \left|\frac{\omega_n^2}{(\omega^2 - \omega_n^2) + j2\zeta\omega_n\omega}\right| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

$|W(j\omega)|$を最大化するには

$(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2 \equiv z$　を最小化すればよい．

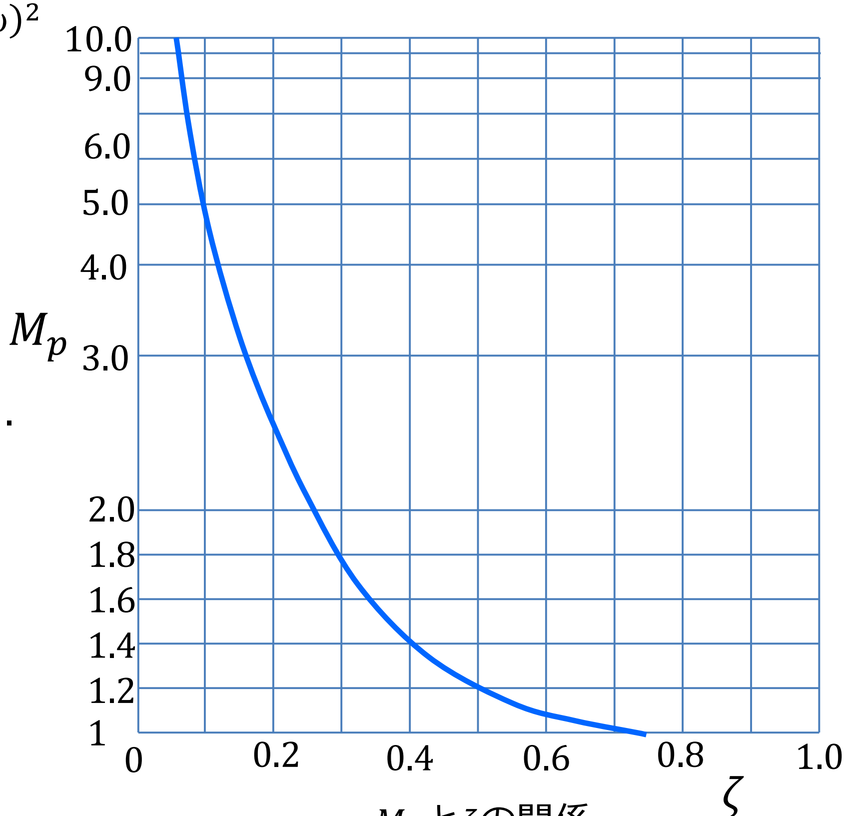
1. $\frac{dz}{d\omega} = 0$を考えると

   $\omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \equiv \omega_p$　のときゲインが最小となる．

2. ω_pが実数として存在するためには

   $1 - 2\zeta^2 > 0\ (\zeta < 1/\sqrt{2})$

3. $M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$



M_pとζの関係

13.3　性能指数による過渡特性の評価

$e(t)$: 単位ステップ入力に対する制御偏差

(1) $I_1 = \int_0^\infty |e(t)|\,\mathrm{d}t$　IAE（integral of absolute value of error）

制御偏差の絶対値の積分

二次遅れ系の場合，$\zeta = 0.7$のとき最小となる

(2) $I_2 = \int_0^\infty e^2(t)\,\mathrm{d}t$　ISE（integral of squared error）

制御偏差の２乗の積分

二次遅れ系の場合，$\zeta = 0.5$のとき最小となる

13.3　性能指数による過渡特性の評価

(3) $I_3 = \int_0^\infty t|e(t)|\,\mathrm{d}t$

ITAE（integral of time multiplied by absolute value of error）

応答の初期における制御偏差の評価を軽くし
時間の経過と共に評価を重くする

二次遅れ系の場合，$\zeta = 0.7$のとき最小となる

(4) $I_4 = \int_0^\infty te^2(t)\,\mathrm{d}t$

ITSE（integral of time multiplied by squared error）

制御偏差の2乗に時間 t をかけて積分

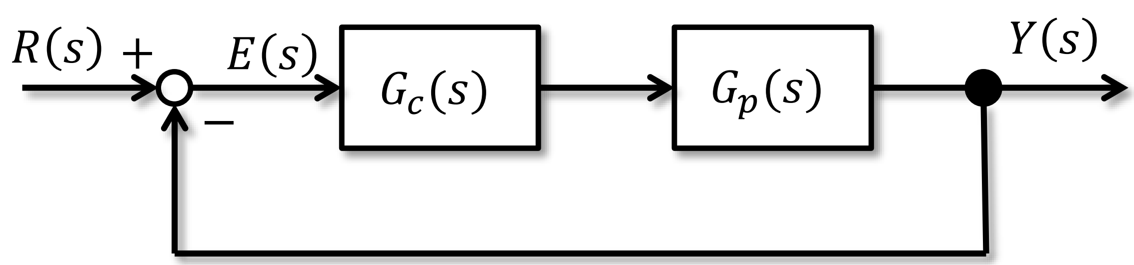
二次遅れ系の場合，$\zeta = 0.6$のとき最小となる

定常特性

目標値または外乱の変化に対する出力信号の定常的な応答特性

定常偏差 (steady-state error)

目標値と制御量の偏差



開ループの伝達関数　$G(s) = G_c(s)G_p(s)$

偏差のラプラス変換　$E(s) = R(s) - Y(s) = \dfrac{1}{1+G(s)}R(s)$

偏差の定常値　$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{1}{1+G(s)}R(s)$

最終値の定理

13.4　制御系の定常特性

一般的な開ループ伝達関数

$$G(s) = \frac{K(1 + b_1 s + \cdots + b_m s^m)}{s^n(1 + a_1 s + \cdots + a_p s^p)} e^{-Ls}$$

n の値が $i\ (= 0,1,2,\cdots)$ のとき，この制御系は i 型の制御系と呼ばれる.

❶　サーボ制御系

$$G(s) = \frac{K}{s\,(1 + T_g s)(1 + T_m s)}; \quad K = K_c K_p$$

1 型

❷　プロセス制御系

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} e^{-Ls}; \quad K = K_c K_p$$

0型

❸　プロセス制御系＋比例＋積分

$$G(s) = \frac{K(1 + bs)}{s(1 + Ts)} e^{-Ls}; K = K_{c2} K_p, b = K_{c1}/K_{c2}$$

1型

13.4　制御系の定常特性hンl f

例題　定常偏差を求めよ

$$G(s)=\frac{K(1+b_1 s+\cdots+b_m s^m)}{s^n(1+a_1 s+\cdots+a_p s^p)}e^{-Ls}$$

(a) $r(t)=\alpha\mathbb{1}(t)$

$$\varepsilon_{sp}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)}\frac{\alpha}{s}=\frac{\alpha}{1+C_p}$$

定常位置偏差（steady-state position error）
オフセット（off-set）

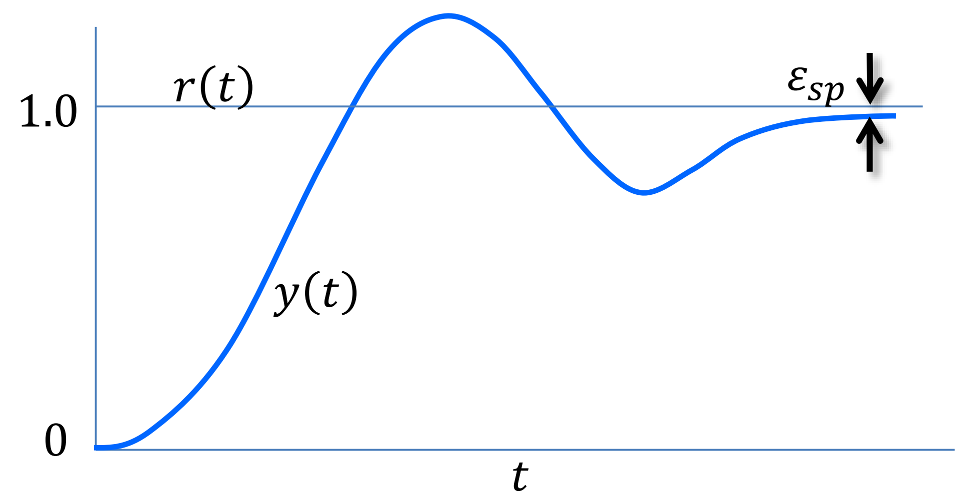
位置偏差定数（position error constant）

$$C_p=\lim_{s\to 0}G(s)$$

$$C_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\begin{cases}K; & n=0\\ \infty; & n=1\\ \infty; & n=2\end{cases}$$

0型の場合は $\frac{\alpha}{K+1}$

1型以上の場合は定常偏差は生じない



13.4　制御系の定常特性

(b) $r(t) = \beta t \mathbb{1}(t)$

$$\varepsilon_{sv} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{\beta}{s^2} = \frac{\beta}{C_v}$$

定常速度偏差（steady-state velocity error）

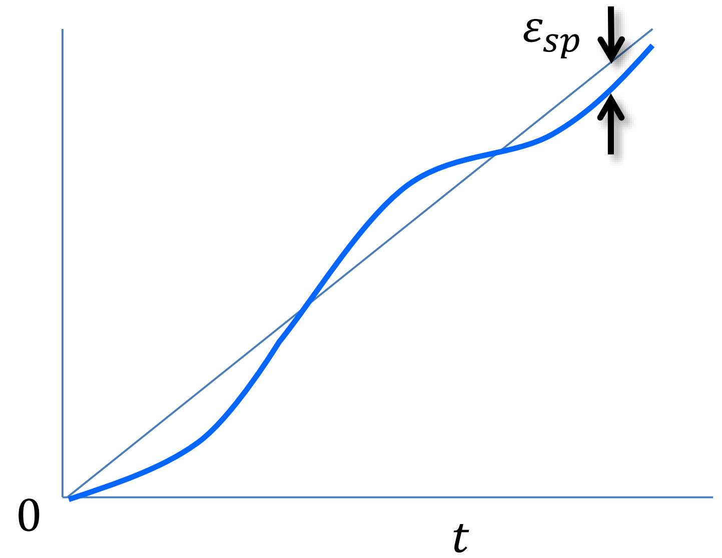
$$C_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

速度偏差定数（velocity error constant）

$$C_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ K; & n = 1 \\ \infty; & n = 2 \end{cases}$$

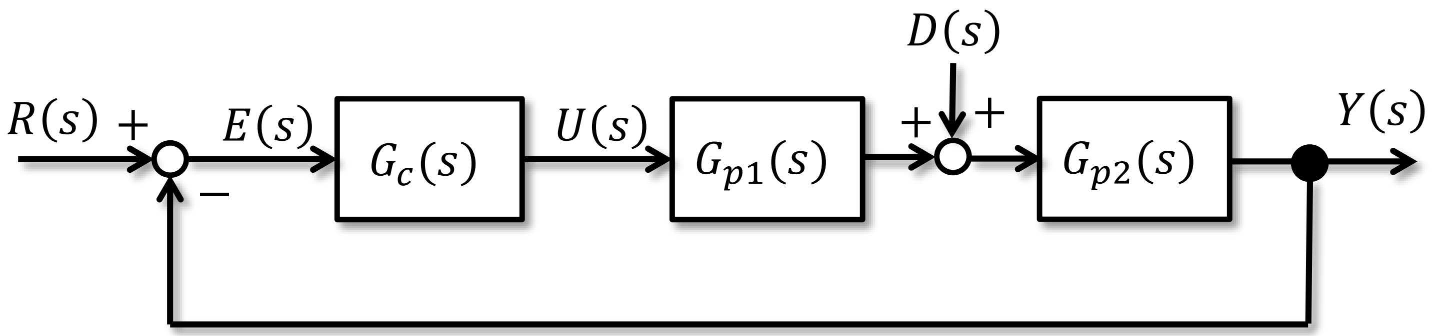
0型の場合は定常偏差無限大

1型の場合は定常が $\frac{\beta}{K}$



13.5　外乱と定常偏差

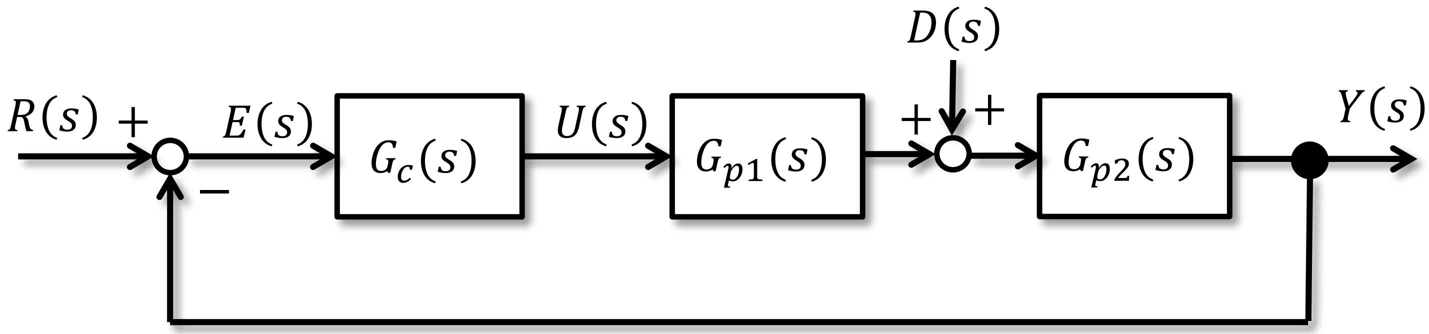
定常偏差への外乱の作用について考える



$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) - \frac{G_{p2}(s)}{1+G(s)}D(s)$$

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) \qquad G_p(s) = G_{p1}(s)G_{p2}(s)$$

13.5　外乱と定常偏差



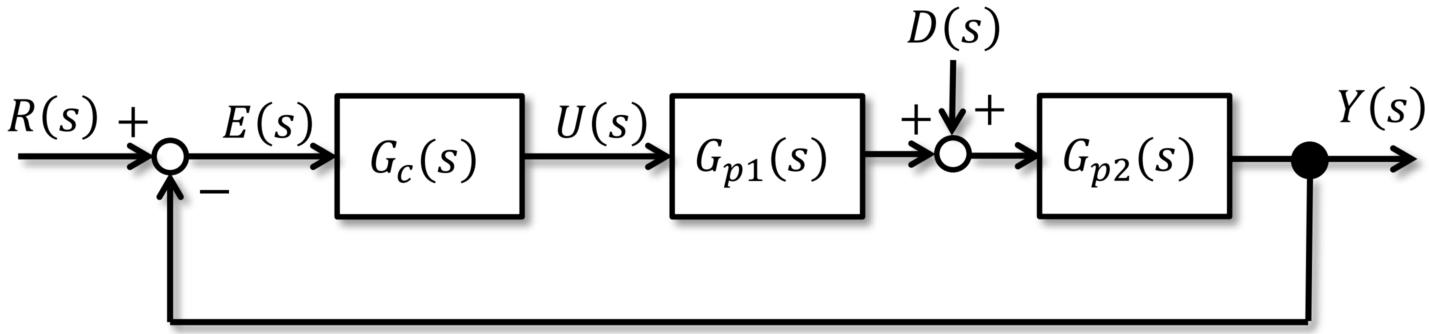
(a)　外乱が出力側に作用する場合（$G_{p2}(s) = 1$）

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) - \frac{1}{1+G(s)}D(s)$$

$$= \frac{1}{1+G(s)}(R(s) - D(s))$$

目標値から$D(s)$を減じた場合を考えればよい

13.5　外乱と定常偏差



(b)　外乱が入力側に作用する場合（$G_{p1}(s) = 1$）

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) - \frac{G_p(s)}{1+G(s)}D(s)$$

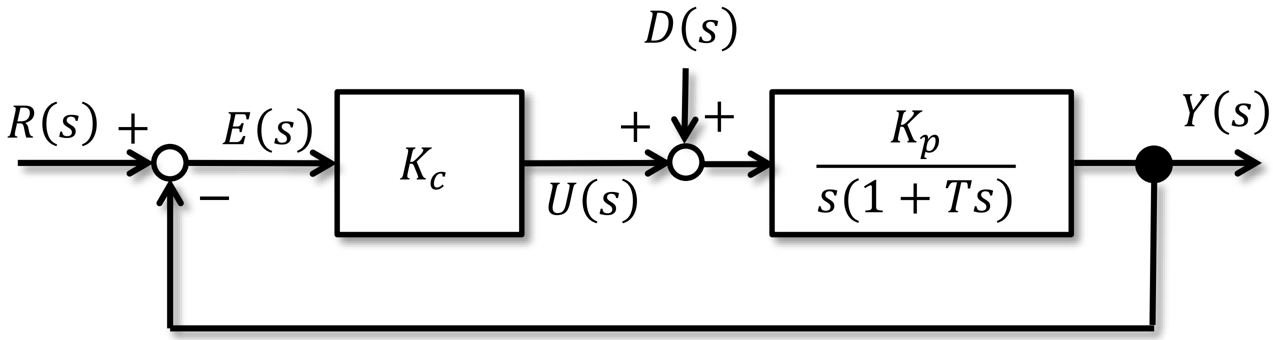
$E(s)$ に及ぼす影響は制御対象の特性 $G_p(s)$ に依存する.

$G_p(s)$ の分母に s が含まれるかどうかによって定常偏差が異なる.

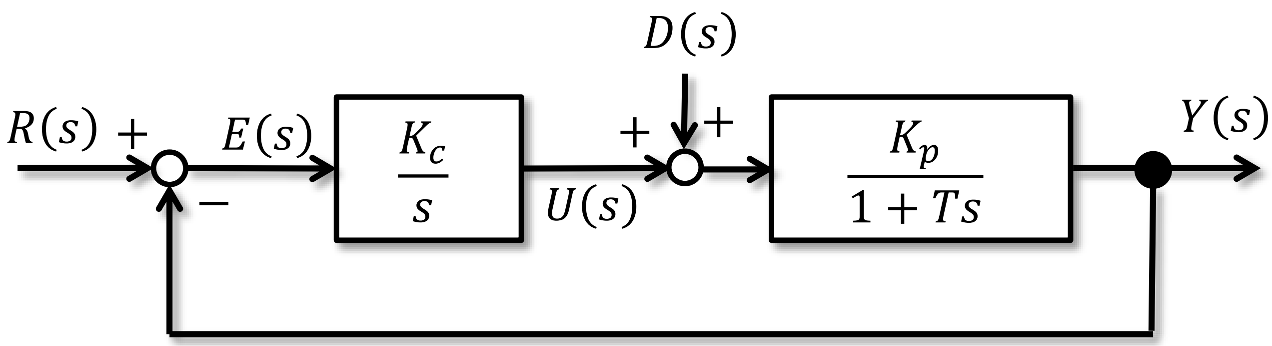
13.5　外乱と定常偏差

例題

(a)



(b)



これらの制御系に対して，外乱が $d(t) = d_0 \mathbb{1}(t)$ としてステップ状に印可された場合の定常偏差を求めよ．ここで $r(t) = 0$ である．

13.5　外乱と定常偏差

例題

$$E(s) = -\frac{G_p(s)}{1+G(s)}D(s); \qquad G(s) = G_c(s)G_p(s)$$

(a)

$$G_c(s) = K_c$$

$$G_p(s) = \frac{K_p}{s(1+Ts)}$$

$$D(s) = \frac{d_0}{s}$$

$$E(s) = -\frac{K_p}{s(1+Ts)+K_cK_p}\frac{d_0}{s}$$

$$e_{sp} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = -\frac{d_0}{K_c}$$

(b)

$$G_c(s) = \frac{K_c}{s}$$

$$G_p(s) = \frac{K_p}{1+Ts}$$

$$D(s) = \frac{d_0}{s}$$

$$E(s) = -\frac{sK_p}{s(1+Ts)+K_cK_p}\frac{d_0}{s}$$

$$e_{sp} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$$