第４回　線形モデル（２）

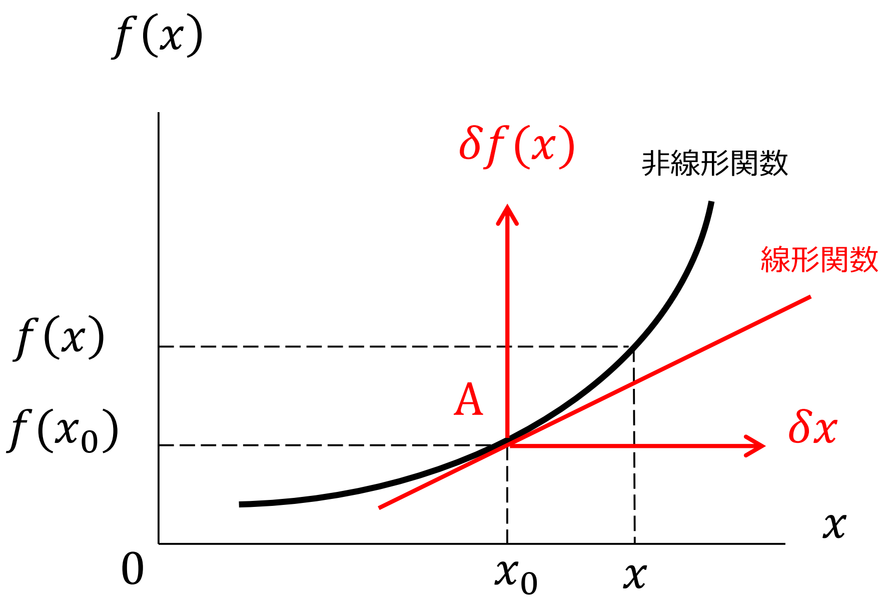
4.1　一般的な線形化

平衡点にとらわれないで　一般的な非線形関数の線形関数への変換を考える

① 　点Aの近傍を原点とする$\delta f(x)-\delta x$座標系を新たに設定

② 　点Aにおける非線形関数の接線の傾きを求める（偏微分）

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=K \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x}=K$$



4.1　一般的な線形化

例　次の関数について$x=\frac{\pi}{2}$の近傍における線形化を行う．

$$f(x)=3\cos x$$

導関数は？

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=-3\sin x$$

$x=\frac{\pi}{2}$を代入すると？

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=-3$$

$x=\frac{\pi}{2}$での関数の値は？

$$f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f(x)=-3\delta x$$

4.2　電機系のモデリング

電機系

$$V(t) = I(t)R$$

R :抵抗 [Ω]

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

C : 静電容量 [F]

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

L :インダクタンス [H]

電流則（キルヒホッフの第一法則）

電気回路の任意の節点において、流れ込む向きを正（又は負）と統一するとき、各線の電流 I_iの総和は0となる。

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

節点（ノード）法則、KCL (Kirchhoff's Current Law) ともいう.

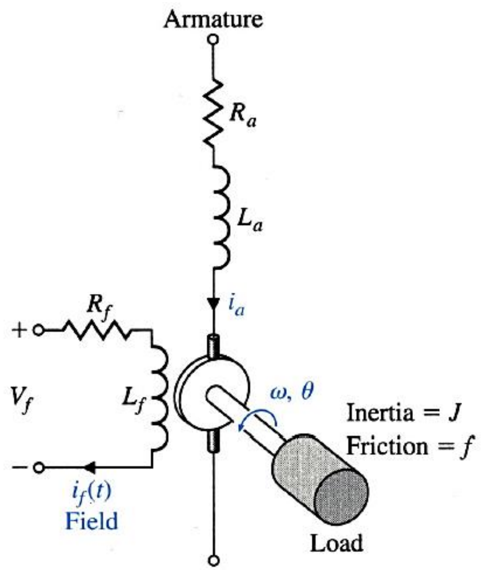
電圧則（キルヒホッフの第二法則）

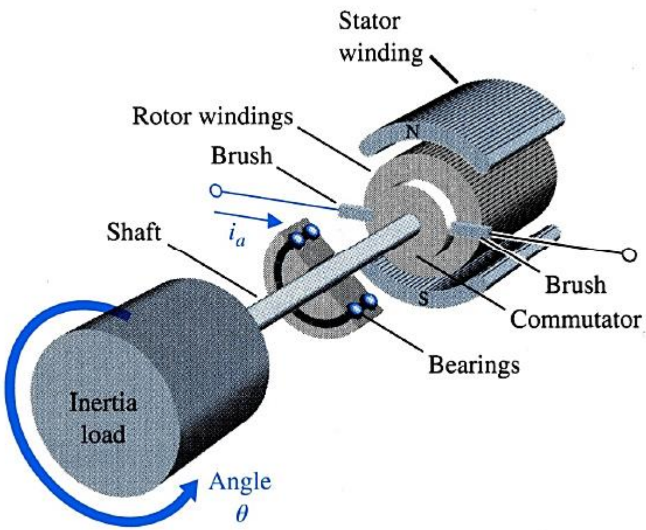
電気回路に任意の閉路をとり電圧の向きを一方向に取ったとき、閉路に沿った各素子の電圧V_iの総和は 0 である。

$$\sum_{i=1}^{N} V_i = 0$$

閉路（ループ）法則、KVL (Kirchhoff's Voltage Law) ともいう.

DCモータの微分方程式を立ててみよう！





R_a ：電機子抵抗

L_a ：インダクタンス

C ：モータロータの慣性モーメントを表す

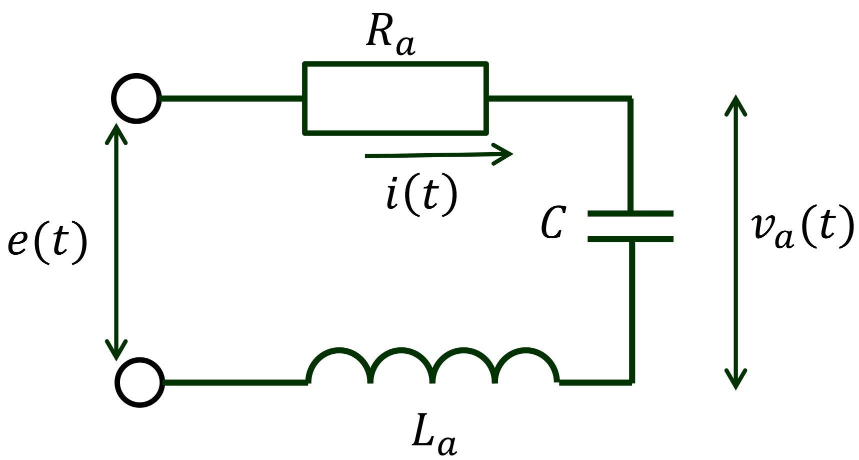
$i(t)$: 電機子電流

$T(t)$: 発生トルク

$e(t)$: 入力電圧

$\theta(t)$: ロータの回転角度

DCモータの等価回路



$$L_a \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R_a i(t) + \frac{1}{C}\int_0^1 i(t)\mathrm{d}t = e(t)$$

$$L_a \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R_a i(t) + v_a(t) = e(t)$$

DCモータの逆起電力$v_a(t)$とDCモータの回転速度は比例するものとすると

$$v_a(t) = K_E \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

K_E ：逆起電力定数

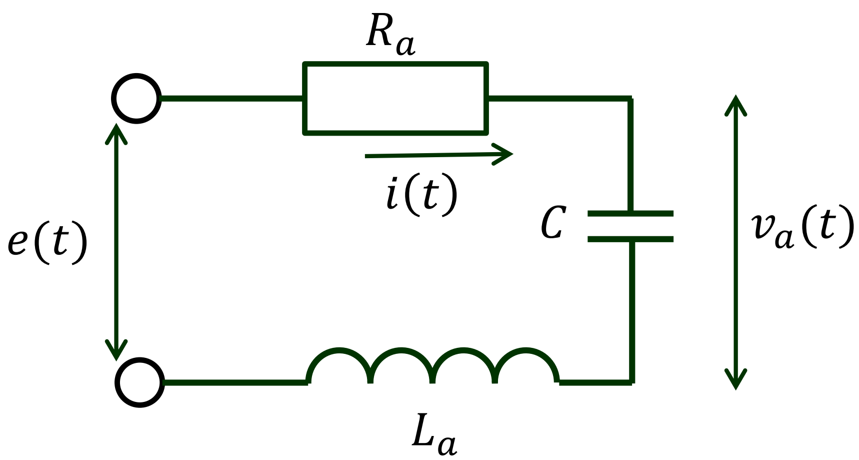
発生トルク $T(t)$ と電機子電流は比例するものとすると

$$T(t) = K_T i(t)$$

K_T ：トルク定数

SI単位系では　$K_E = K_T$

DCモータの等価回路



$$i(t) = \frac{1}{K_T} T(t)$$

$$L_a \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R_a \frac{1}{K_T} T(t) + K_E \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = e(t)$$

力のつり合いの式

$$T(t) = K_T i(t) = J \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + D \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{K_T}\left(J \frac{\mathrm{d}^3\theta(t)}{\mathrm{d}t^3} + D \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

J:　DCモータの回転軸や電機子を含むロータの慣性モーメント

D:　ロータの機械的な摩擦，ジュール熱損などで発生する粘性抵抗

4.2　電機系のモデリング

$$L_a \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R_a \frac{1}{K_T} T(t) + K_E \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = e(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{K_T}\left(J \frac{\mathrm{d}^3\theta(t)}{\mathrm{d}t^3} + D \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

DCモータの微分方程式

$$L_a \frac{1}{K_T}\left(J \frac{\mathrm{d}^3\theta(t)}{\mathrm{d}t^3} + D \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) + R_a \frac{1}{K_T}\left(J \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + D \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right) + K_E \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = e(t)$$

もしくは

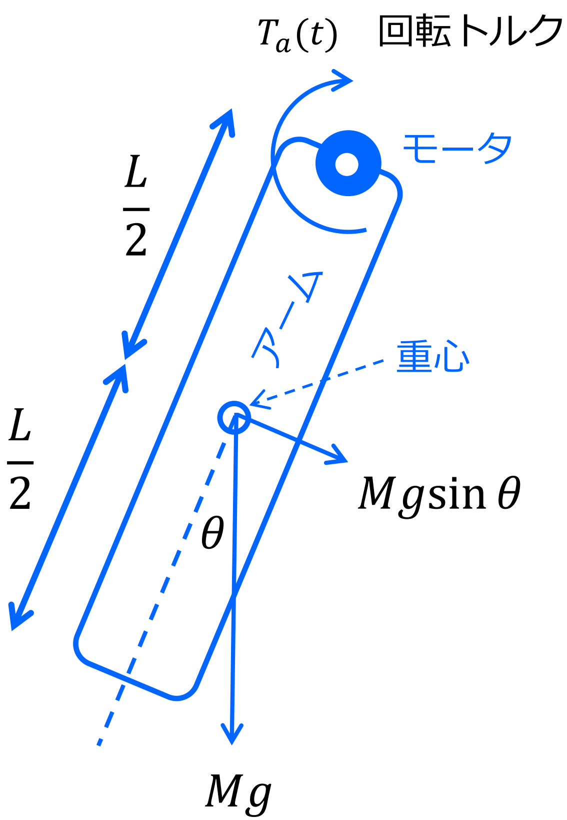
$$\frac{L_a J}{K_T}\frac{\mathrm{d}^3\theta(t)}{\mathrm{d}t^3} + \left(\frac{L_a D}{K_T} + \frac{R_a J}{K_T}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{R_a D}{K_T} + K_E\right)\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = e(t)$$

角速度を出力とした場合

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{L_a J}{K_T}\frac{\mathrm{d}^2\omega(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L_a D}{K_T} + \frac{R_a J}{K_T}\right)\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_a D}{K_T} + K_E\right)\omega(t) = e(t)$$

ロボットアームの線形微分方程式を立ててみよう！



M　質量

J　慣性モーメント

D　粘性抵抗

アームの力学を表す非線形微分方程式

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+Mg\frac{L}{2}\sin\theta = T_m\,(t)$$

回転トルクのつり合いの式

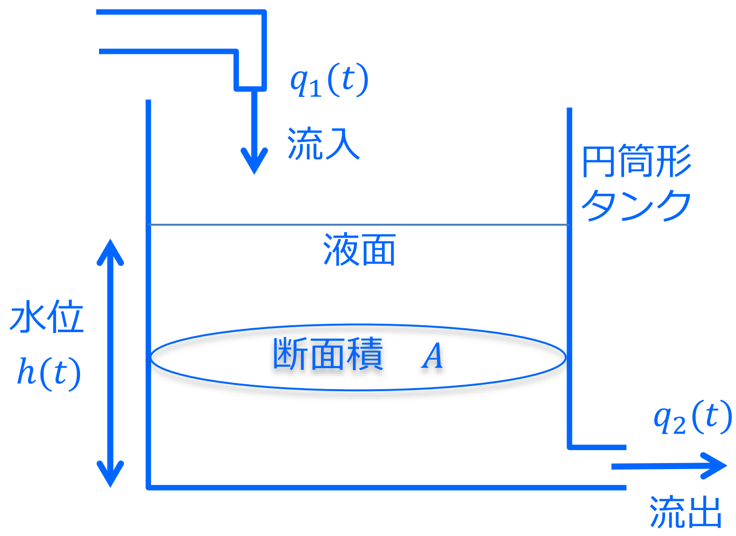
$$T_a(t) = Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$\sin\theta \approx \theta$

鉛直方向を平衡点とする線形化

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+D\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+Mg\frac{L}{2}\theta = T_m\,(t)$$

タンクの線形微分方程式を立ててみよう！



① タンクの液面の時間変動

$$A\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = q_1(t) - q_2(t)$$

② 流出量と水位の関係（水力学の公式）

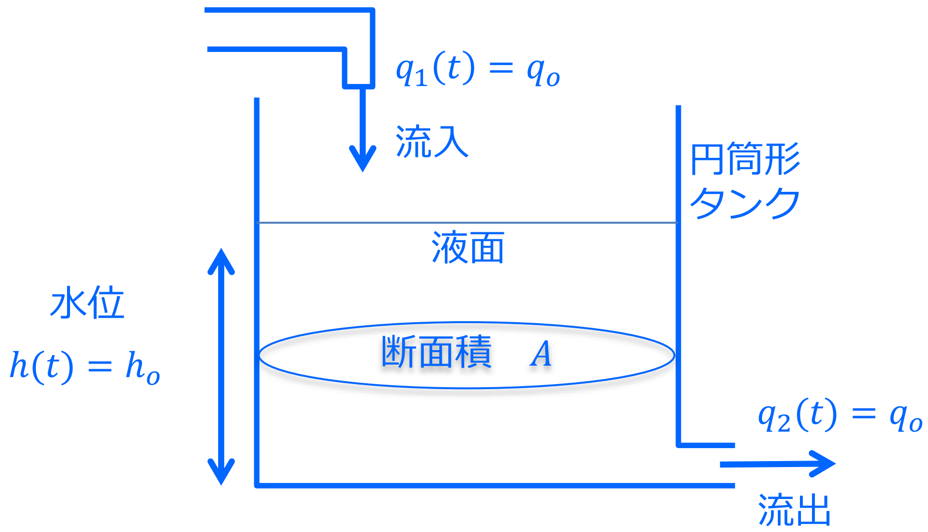
$$q_2(t) = ca\sqrt{2gh(t)}$$

c　流量係数
a　流出口の断面積

② →①　タンク水位の力学を表す非線形微分方程式

$$A\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = q_1(t) - ca\sqrt{2gh(t)}$$

4.4　流体系のモデリング



流入量の平衡点 q_o 周辺で線形化

流入量 $q_1(t) = q_o$

流出量 $q_2(t) = q_o$

水位流出量 $h(t) = h_o$

これらの条件で
つり合っていることを想定

$$h_o = \frac{q_o^2}{2g(ca)^2}$$

q_o からの微小な変化量を $\Delta q_2(t)$ と表す．ここで $|\Delta q_2(t)| < \varepsilon$

$$q_2(t) = q_o = ca\sqrt{2gh_o}$$

$$\Delta q_2(t) = ca\sqrt{2g\Delta h(t)}$$

$$q_o + \Delta q_2(t) = ca\sqrt{2g(h_o + \Delta h(t))}$$

4.4　流体系のモデリング

$$q_o + \Delta q_2(t) = ca\sqrt{2g(h_o + \Delta h(t))}$$

非線形項を二項級数によって線形化

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$として

$$f(x) = f(0) + f(0)x + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\sqrt{2g(h_o + \Delta h(t))} = \sqrt{2gh_o}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta h(t)}{h_o} - \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta h(t)}{h_o}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$\approx \sqrt{2gh_o}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta h(t)}{h_o}\right)$$

$\Delta h(t) \ll h_o$

$$q_o + \Delta q_2(t) = ca\sqrt{2gh_o}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta h(t)}{h_o}\right)$$

4.4　流体系のモデリング

$$q_o + \Delta q_2(t) = ca\sqrt{2gh_o}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta h(t)}{h_o}\right) = q_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta h(t)}{h_o}\right)$$

$$q_o = ca\sqrt{2gh_o}$$

$$\Delta q_2(t) = \frac{q_o}{2h_o}\Delta h$$

$$A\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = q_1(t) - q_2(t)$$

$$A\frac{\mathrm{d}\Delta h(t)}{\mathrm{d}t} = \Delta q_1(t) - \Delta q_2(t)$$

$$A\frac{\mathrm{d}\Delta h(t)}{\mathrm{d}t} = \Delta q_1(t) - \frac{q_o}{2h_o}\Delta h(t)$$

$$A\frac{\mathrm{d}\Delta h(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{q_o}{2h_o}\Delta h(t) = \Delta q_1(t)$$

$$R = \frac{2h_o}{q_o}$$

$$A\frac{\mathrm{d}\Delta h(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}\Delta h(t) = \Delta q_1(t)$$

4.4　流体系のモデリング