第5回　システムの要素と表現（1）

5. 1　基本的要素（basic elements）

線形要素の時間領域表現（t −領域表現）

(a) 比例要素（**proportional element**）

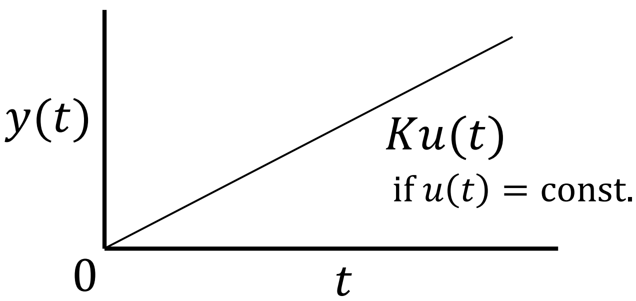
入力と出力に時間的遅れが無く，しかも比例関係にあるとき最も基本的な要素

$$y(t) = Ku(t)$$

K ：比例ゲイン

入力 $u(t)$

出力 $y(t)$



(b) 積分要素（**integral element**）

入力を積分したものが出力となる要素

$$y(t) = K\int_0^t u(\tau)\ d\tau$$

入力 $u(t)$

出力 $y(t)$

5. 1　基本的要素（basic elements)

(c) 微分要素（**derivative element**）

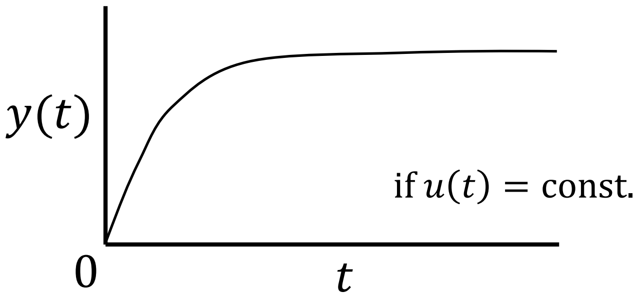
入力を微分したものが出力となる要素

$$y(t) = K\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

入力 $u(t)$，出力 $y(t)$

(d) 一次遅れ要素（**first-order lag element**）

$$T\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$$



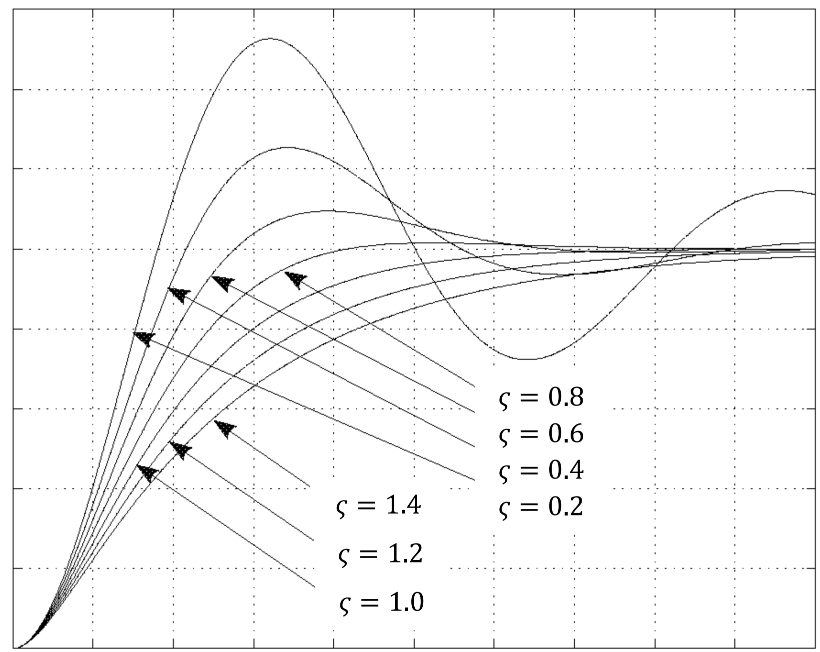
(e) 二次遅れ要素（second-order lag element）

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t)=a_0u(t)$$

$$\varsigma\equiv\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}$$ 減衰係数

$$\omega_n\equiv\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$ 固有角振動数

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\varsigma\omega_n\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2u(t)$$



5. 1　基本的要素（basic elements)

(f) むだ時間要素（**dead time element**）

入力に対して($t - L$)の時間 L だけ時間遅れが生じる系

$$v_0(t) = v_i(t - L)$$

(g) 高次系要素(high-order elment)

出力の3次以上の項を含む要素．複数の要素の結合

5.2　伝達関数とラプラス変換（transfer function and Laplace transformation）

ラプラス変換　$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$　　$F(s) = L[f(t)]$

逆ラプラス変換　$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$　　$f(t) = L^{-1}[F(s)]$

比例要素のラプラス変換と伝達関数

$$y(t) = Ku(t) \Rightarrow L[Ku(t)] = KU(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K$$

積分要素のラプラス変換と伝達関数

$$y(t) = K\int_0^t u(\tau)\ d\tau$$

$$\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)$$

$$\Rightarrow L\left[A\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sAY(s)$$

$$L[u(t)] = U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{sA} = \frac{1}{sT_I}$$

$A \equiv T_I$ 積分時間

5.2　伝達関数とラプラス変換（transfer function and Laplace transformation)

微分要素のラプラス変換と伝達関数

$$y(t) = K\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

➡

$$L\left[K\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sKU(s)$$

$$L[y(t)] = Y(s)$$

➡

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = sK$$

一次遅れ要素のラプラス変換

$$G(s) = \frac{K}{sT + 1}$$

$$T\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$$

➡

$$L\left[T\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sTY(s)$$

$$L[y(t)] = Y(s)$$

$$L[u(t)] = U(s)$$

➡

$$G(s) = \frac{1}{sT + 1}$$

T：時定数

5.2　伝達関数とラプラス変換（transfer function and Laplace transformation)

二次遅れ要素のラプラス変換

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\varsigma\omega_n \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t)$$

$$L\left[\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = s^2 Y(s) \qquad L\left[2\varsigma\omega_n \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] = 2\varsigma\omega_n sY(s) \qquad L[\omega_n^2 y(t)] = \omega_n^2 Y(s) \qquad L[\omega_n^2 u(t)] = \omega_n^2 U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{K/\omega_n^2}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad T_1, T_2 \equiv \frac{1}{\omega_n(\zeta \pm \sqrt{1-\zeta^2})}$$

5.2　伝達関数とラプラス変換（transfer function and Laplace transformation)

高次要素のラプラス変換

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-2} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-2}} + \cdots + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + b_{m-2} \frac{\mathrm{d}^{m-2} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-2}} + \cdots + b_0 x(t)$$

➡ $$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + a_{n-2} s^{n-2} Y(s) + \cdots + a_0 Y(s)$$

$$= b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + b_{m-2} s^{m-2} X(s) + \cdots + b_0 X(s)$$

➡ $$Y(s)(a_n s^n Y + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_0)$$

$$= X(s)(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b_0)$$

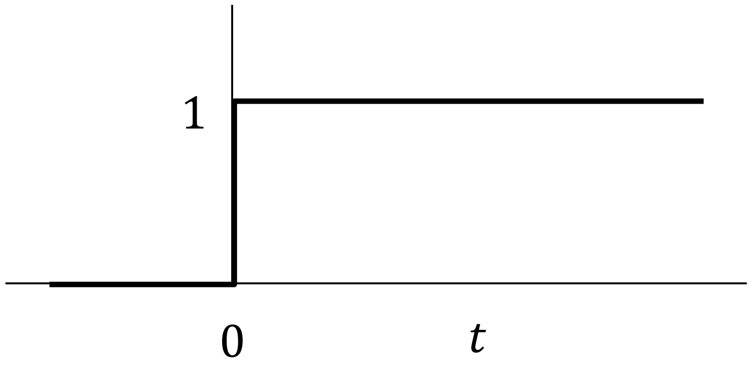
➡ $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_0}$$

5.3　基本的な入力関数(basic step functions)

単位ステップ関数

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

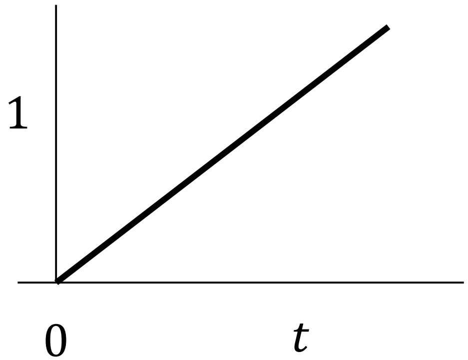
$$L[u(t)] = \frac{1}{s}$$



ランプ関数

$$u(t) = \begin{cases} t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} Kt & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$L[u(t)] = K\frac{1}{s^2}$$

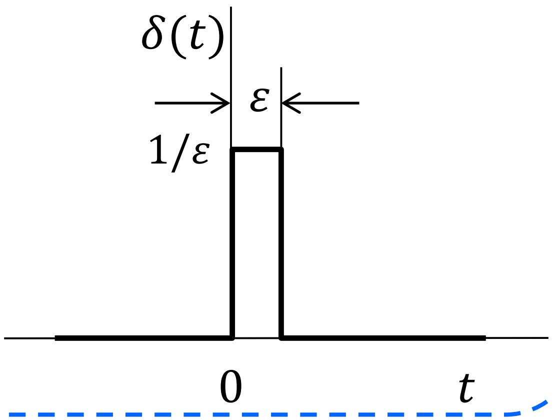


5.3　基本的な入力関数(basic step functions)

単位インパルス関数

$$\delta(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t < 0 \text{ or } t > \varepsilon \end{cases}$$

$$L[\delta(t)] = \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon}$$



（デュラクの）デルタ関数を導入

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{se^{-s\varepsilon}}{s} = 1 \qquad L[\delta(t)] = 1$$