第6回　システムの要素と表現（２）

6.1　要素に対する応答の例

電圧ー電流	$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$
電圧ー電荷	$v(t)=\frac{1}{C}q(t)$

力ー速度	$f(t)=K\int_0^t v(t)\mathrm{d}t$
力ー変位	$f(t)=Kx(t)$

トルクー角速度	$T(t)=K\int_0^t \omega(t)\mathrm{d}t$
トルクー変位角	$T(t)=K\theta(t)$

電圧ー電流	$v(t)=Ri(t)$
電圧ー電荷	$v(t)=R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)$

力ー速度	$f(t)=f_v v(t)$
力ー変位	$f(t)=f_v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$

トルクー角速度	$T(t)=D\omega(t)$
トルクー変位角	$T(t)=D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t)$

電圧ー電流	$v(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$
電圧ー電荷	$v(t)=L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q(t)$

力ー速度	$f(t)=M\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$
力ー変位	$f(t)=M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$

トルクー角速度	$T(t)=J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(t)$
トルクー変位角	$T(t)=J\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta(t)$

6.1　要素に対する応答の例 ～微分要素のステップ応答～

図の条件より，以下の関係が成り立つ.

$$e_i(t) = e_c(t) + e_o(t) \qquad e_o(t) = Ri(t) \qquad e_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t$$

電流$i(t)$を消去すると

$$\frac{e_o(t)}{CR} = \frac{\mathrm{d}(e_i(t) - e_o(t))}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}e_o(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{e_o(t)}{CR} = \frac{\mathrm{d}e_i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$\mathcal{L}$

$$\left(\frac{1}{CRs} + 1\right) sE_o(s) = sE_i(s)$$

$CR \equiv T$

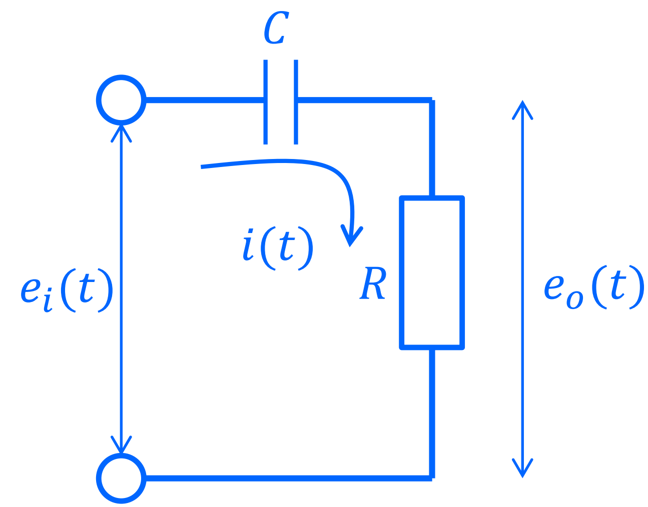
$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Ts}{1 + Ts}$$

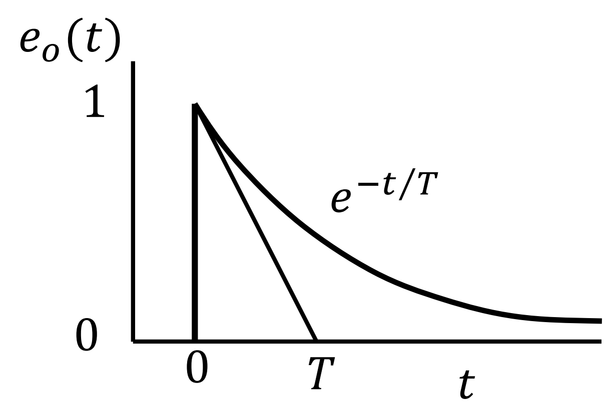
$\mathcal{L}^{-1}$

$$e_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[E_o(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{Ts}{1 + Ts}\right] = e^{-t/T}$$

単位ステップ入力

$e_i(t) = 1$



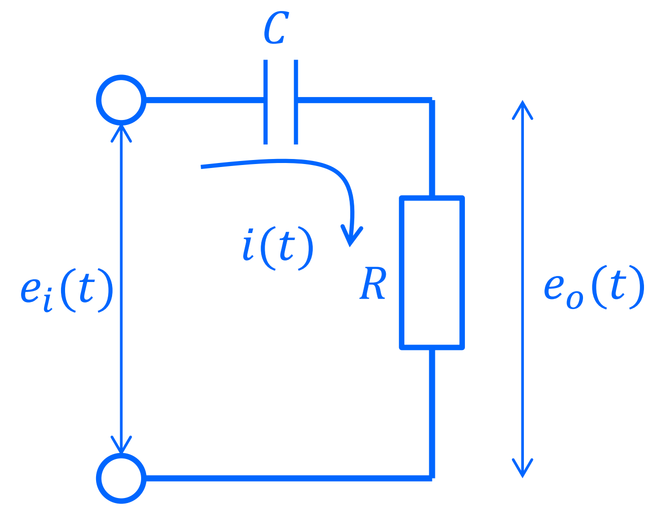


第6回　システムの要素と表現（2）

6.1　要素に対する応答の例～微分要素のインパルス応答～

インパルス入力

$$e_i(t) = \delta(t)$$



図の条件より，以下の関係が成り立つ.

$$E_i(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \qquad E_o(s) = G(s)E_i(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \qquad \delta\,(t) - \alpha e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{s}{s+\alpha s}$$

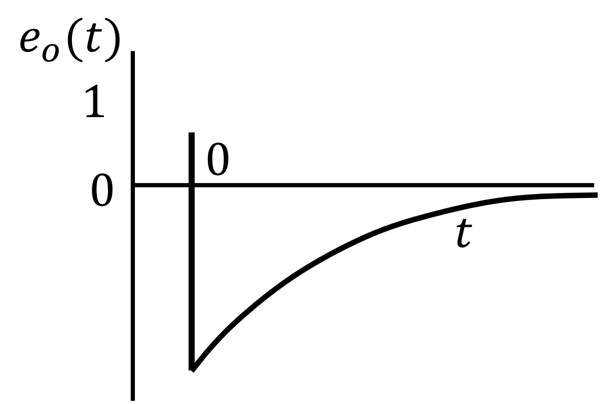
$$e_o(t) = \delta\,(t) - \frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}}$$

$t = 0$

$$e_o(t) = +\infty$$

$t > 0$

$$e_o(t) = -\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}}$$



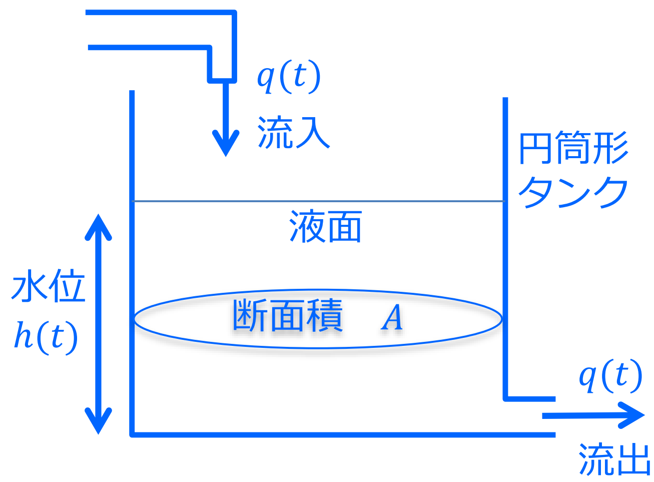
6.1　要素に対する応答の例～積分要素のステップ応答～

図の条件より，以下の関係が成り立つ.

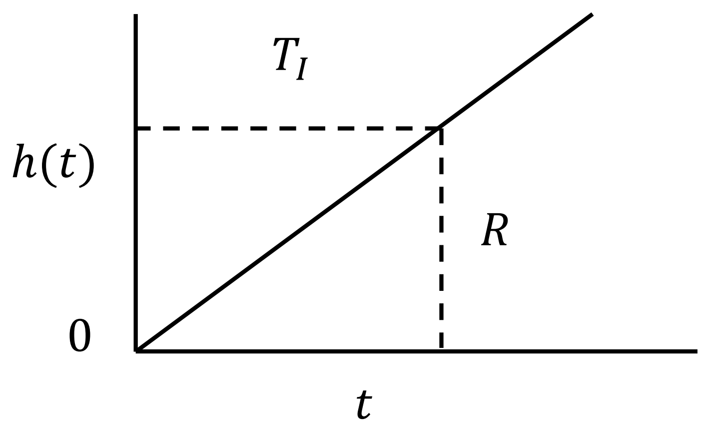
$$H(s) = G(s)Q(s) = \frac{R}{sA}\frac{1}{s} = \frac{R}{sT_I}\frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$\frac{t^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{1}{s^{n+1}} \qquad h(t) = \frac{R}{T_I}t$$



$$R = \frac{2h_o}{q_o}$$



積分要素のステップ応答

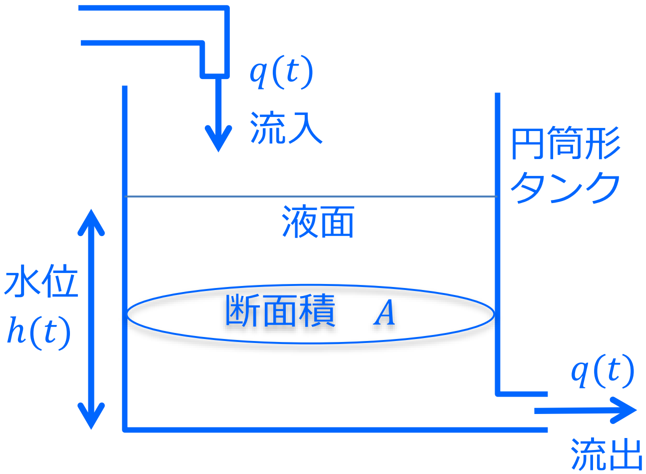
6.1　要素に対する応答の例～積分要素のインパルス応答～

図の条件より，以下の関係が成り立つ．

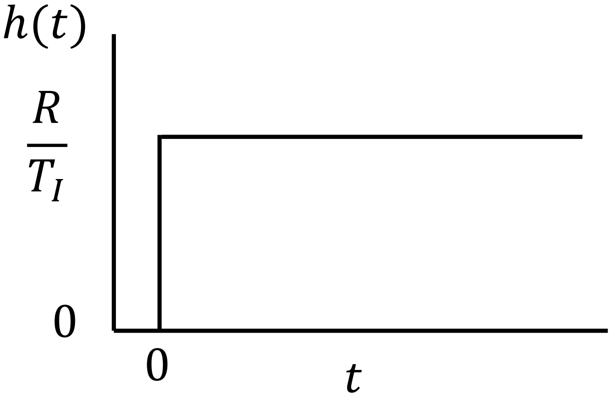
$$H(s) = G(s)Q(s) = \frac{R}{sT_I}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$h(t) = \frac{R}{T_I}u(t)$$



$$R = \frac{2h_o}{q_o}$$



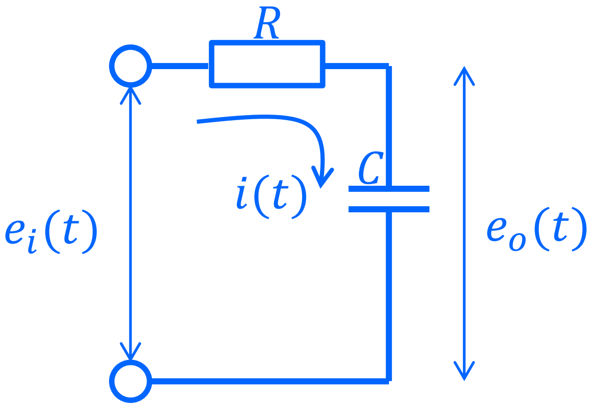
積分要素のインパルス応答

6.1　要素に対する応答の例～一次遅れのステップ応答～

図に示すRC回路で，入力電圧$e_i(t)$をステップ関数状に変化させた場合の出力電圧$e_o(t)$の変化を考える．

ステップ入力

$e_i(t) = 1$



図の条件より，以下の関係が成り立つ．

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(e_i(t) - e_o(t)\right) \qquad e_o(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t$$

電流$i(t)$を消去すると

$$CR\frac{\mathrm{d}e_o(t)}{\mathrm{d}t} + e_o(t) = e_i(t)$$

$\mathcal{L}$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{1 + CRs}$$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{1 + Ts}$$

T:時定数

6.1　要素に対する応答の例～一次遅れのステップ応答～

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{1+CRs}$$

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{1+Ts}\qquad T:\text{時定数}$$

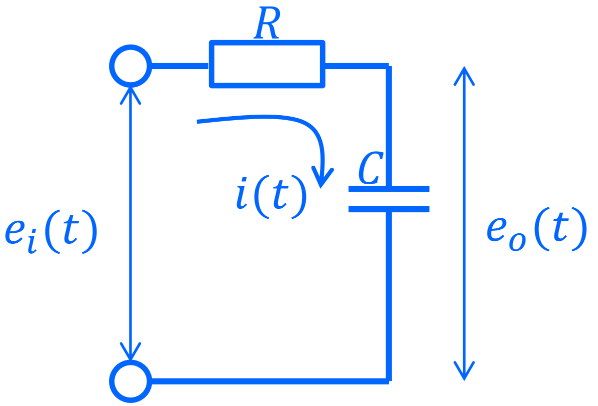
$$E_o(s)=\frac{1}{1+Ts}E_i(s)=\frac{1}{1+Ts}\frac{1}{s}$$

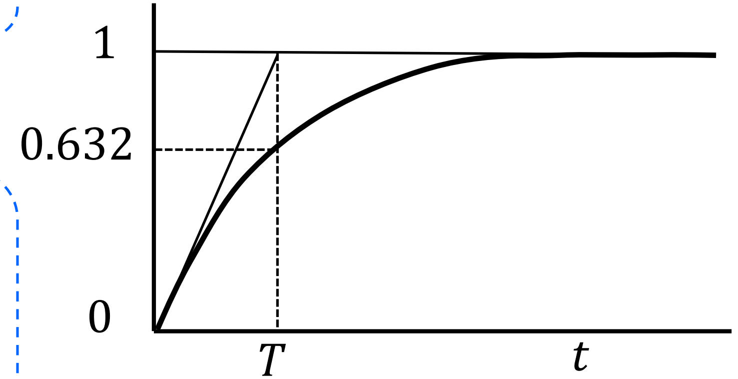
$$\mathcal{L}^{-1}[E_o(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+Ts}\frac{1}{s}\right]=\left[\frac{1}{s}-\frac{T}{1+Ts}\right]$$

$$=1-e^{-t/T}$$

ステップ入力

$e_i(t)=1$





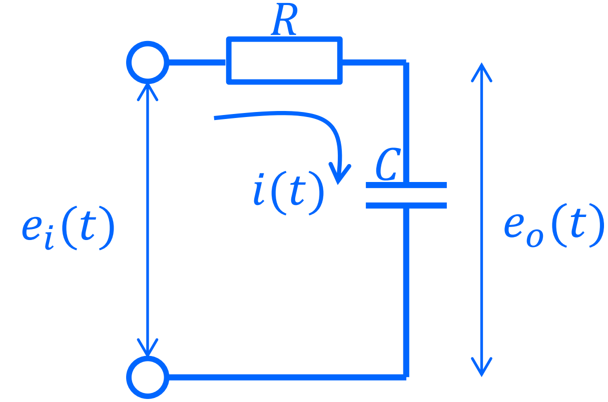
一次遅れ要素のステップ応答

6.1　要素に対する応答の例～一次遅れのランプ応答～

図に示すRC回路で，入力電圧$e_i(t)$をランプ関数状に変化させた場合の出力電圧$e_o(t)$の変化を考える．

ランプ入力

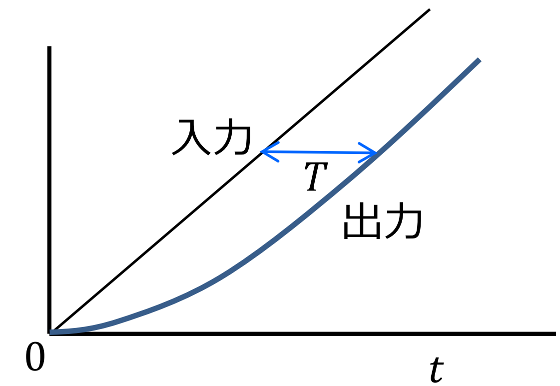
$$e_i(t) = t$$



$$E_o(s) = \frac{1}{1+Ts}E_i(s) = \frac{1}{1+Ts}\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[E_o(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+T_s}\frac{1}{s^2}\right] = \left[\frac{1}{s^2} - \left(\frac{T}{s} - \frac{T^2}{1+Ts}\right)\right]$$

$$= t - T(1 - e^{-t/T})$$



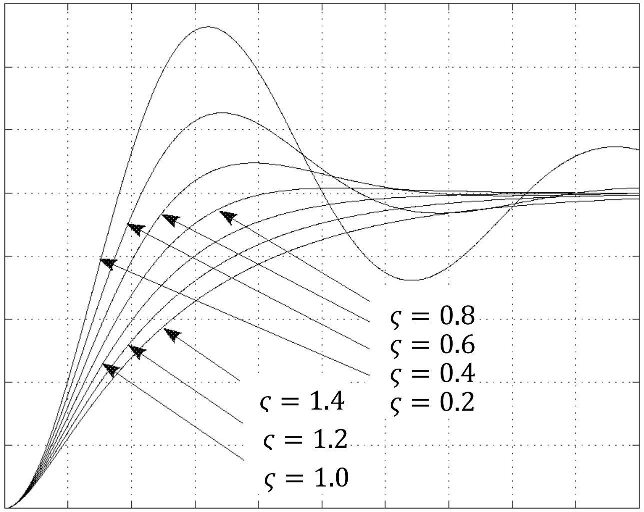
一次遅れ要素のランプ応答

6.1　要素に対する応答の例～二次遅れのステップ応答～

伝達関数 $G(s)$ にステップ入力を印可した場合の応答を考える．

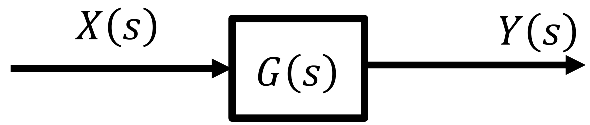
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} X(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$



6.2　ブロック線図

ブロック線図



制御システムを構成している要素の機能や要素間の関係を解りやすく示した図

各四角をブロック（block）と言い，要素の機能や名前を入れる

各ブロックに入る矢印は入力信号（input，原因）

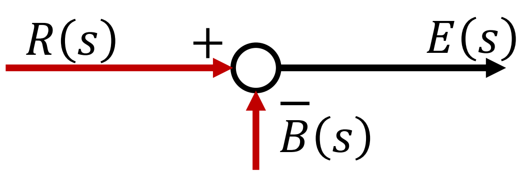
出て行く矢印は出力信号（output，結果）または応答（response）

ブロック線図の構造

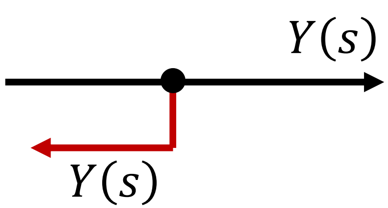
ブロック線図の基本記号

ブロック線図の信号はs領域で表現する

ブロック線図は１入力１出力（SISO）



(a) 加え合わせ点　(summing point)

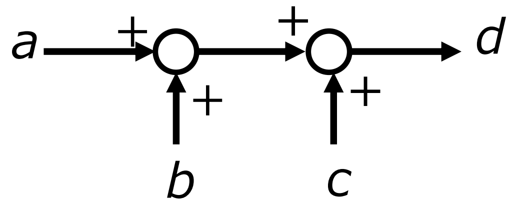


(b) 引出し点　(take-off point)

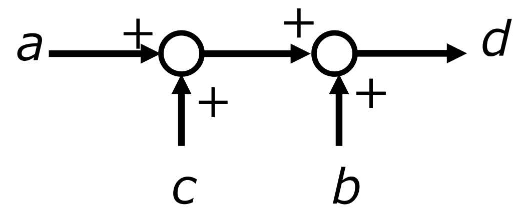
6.2　ブロック線図 ～ブロック線図の等価変換～

加え合わせ点交換

変換前

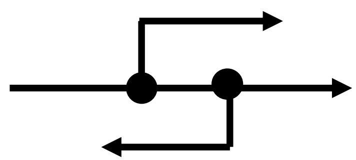


変換後

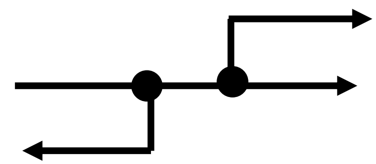


引き出し点交換

変換前

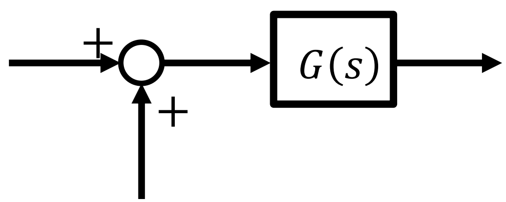


変換後

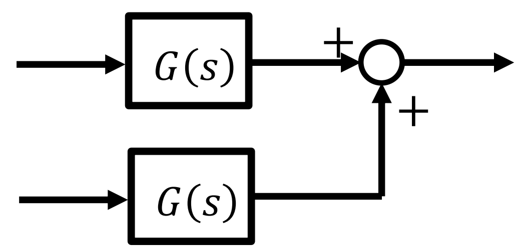


加え合わせ点移動

変換前

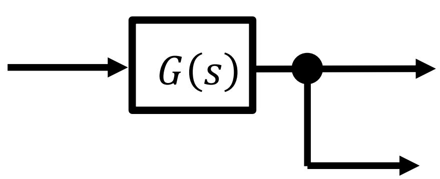


変換後

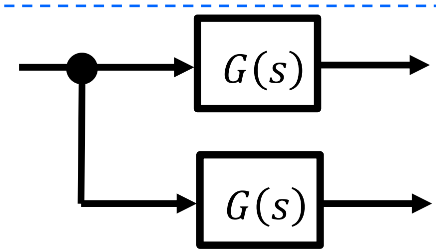


引き出し点移動

変換前

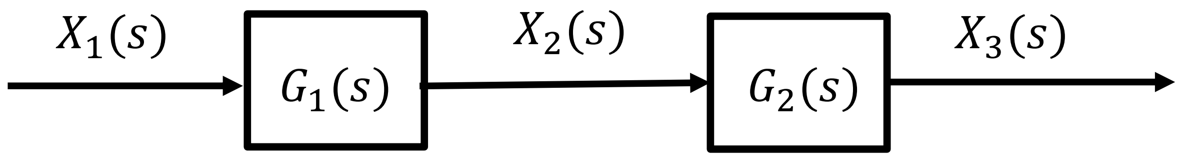


変換後

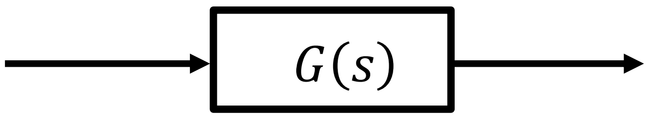


6.2　ブロック線図

直列接続



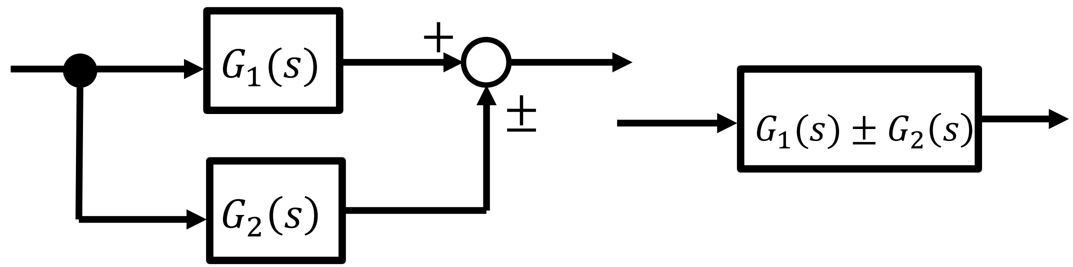
$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = G_1(s) \qquad \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = G_2(s)$$



$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

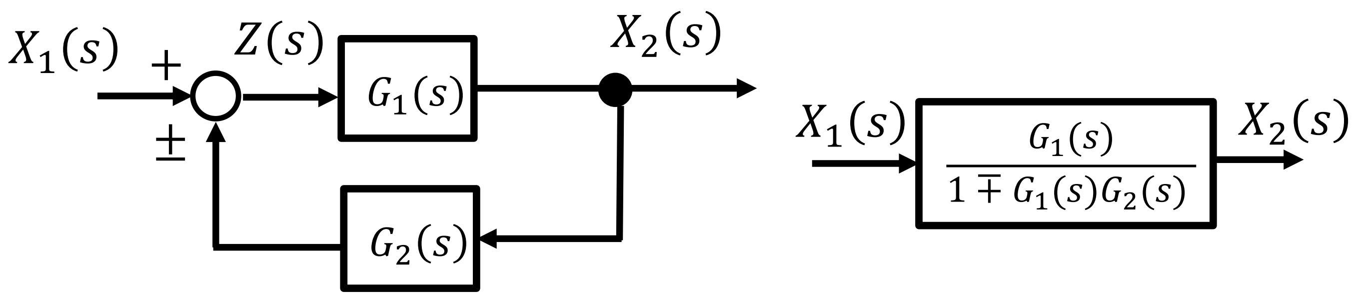
6.2　ブロック線図

並列接続



$$X_2(s) = G_1(s)\,X_1(s) \pm G_2\,(s)\,X_1(s)$$
$$= \{G_1(s)\ \pm G_2\,(s)\}X_1(s)$$

フィードバック接続

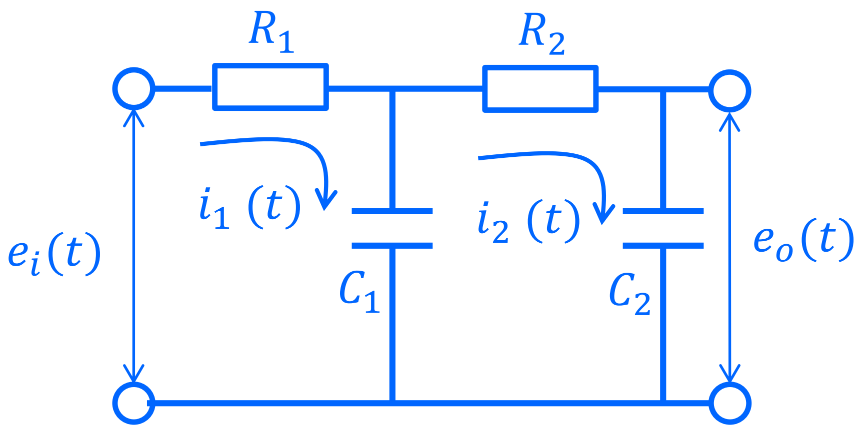


$$Z(s) = X_1(s) \pm G_2\,(s)\,X_2(s)$$

$$X_2(s) = G_1(s)\,Z(s)$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$$

6.3　例題(1)



入力電圧$e_i(t)$と出力電圧$e_o(t)$の伝達関数$G(s)$を求めよう！

(1) $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $I(s) = I_1(s) + I_2(s)$

(2)
$$e_i(t) = i_1(t)R_1 + i_2(t)R_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\mathrm{d}t$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad E_i(s) = R_1 I(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

6.3　例題(1)

(3)　$$i_2(t)R_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C_1}\int i_1(t)\mathrm{d}t$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = \frac{1}{C_1 s} I_1(s)$$

(4)　$$e_o = \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\mathrm{d}t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad E_o(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

$$\Downarrow$$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1)s + 1}$$

6.4　例題(2)

直流モータの印可電圧$v(t)$と軸の回転角$x(t)$の伝達関数$G(s)$を求めよう！

直流モータの発生トルク$\tau(t)$は電機子電流$i(t)$に比例する

$$\tau(t) = K_T i(t) \qquad K_T：トルク定数$$

逆起電力$\tau_E(t)$が直流モータの速度に比例する

$$\tau_E(t) = K_E \dot{x}(t) \qquad K_E：逆起電力定数$$

$$v(t) = Ri(t) + \tau_E(t) = Ri(t) + k_E \, \dot{x}(t)$$

6.4　例題(2)

付加の慣性モーメントをJとすると，運動方程式は

$$J\ddot{x}(t) = \tau(t) = k_T i(t)$$

$\mathcal{L}$ $$V(s) = RI(s) + k_E\, sX(s)$$

$\mathcal{L}$ $$Js^2X(s) = k_T I(s)$$

$I(s)$を消去

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{1}{k_E s(1+T_s)} \qquad T \equiv \frac{JR}{k_T k_E}$$