第7回　応答の周波数特性（１）

7.1　正弦波入力に対する定常応答

周波数領域解析：高次のシステムの扱いが容易
　　　　　　　　フィードバック制御系の解析と設計の有力な手段

例題　角周波数 ω[rad/sec] の正弦波入力 $u(t) = \sin\omega t$ を考える．

伝達関数　$G(s) = \dfrac{1}{s+1}$　のシステムに入力したら，出力はどのようになるだろう？

$U(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

部分分数展開

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{B_{01}s + B_{00}}{s^2+\omega^2} + \frac{B_{11}}{s+1}$$

$$B_{01} = -\frac{\omega}{1+\omega^2} \qquad B_{00} = \frac{\omega}{1+\omega^2} \qquad B_{11} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$\mathcal{L}$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}\omega) + B_{11}e^{-t}$$

$t \to \infty$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}\omega)$$

7.1　正弦波入力に対する定常応答

伝達関数 $G(s)$ の要素に周波数 ω の正弦波信号を印加したときの定常状態における出力信号

過渡現象が消滅した状態

$$u(t) = \sin\omega t \;\longrightarrow\; \boxed{G(s)} \;\longrightarrow\; y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}\omega)$$

振幅　　位相

（1）　定常出力$y(t)$は正弦波入力$u(t)$と同じ角周波数ω[rad/sec] の正弦波になる。

(2)　定常出力の振幅と位相は，伝達関数 $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ について $s \to j\omega$ とした場合の

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1}{1+\omega^2} + j\frac{-\omega}{1+\omega^2}$$

実部　　虚部

との間に

振幅 $$|G(j\omega)| = \sqrt{(\mathrm{Re}G(j\omega))^2+(\mathrm{Im}G(j\omega))^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

位相 $$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}G(j\omega)}{\mathrm{Re}G(j\omega)} = \tan^{-1}\omega$$

の関係がある.

7.1　正弦波入力に対する定常応答

周波数応答法

フーリエ変換

1. 何らか入力 $u(t)$ を印可してみる.
2. $u(t)$ は周波数領域で表現すると，$U(j\omega) = \int_0^\infty u(t)e^{-j\omega}\mathrm{d}t$
3. システムの出力は $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$
4. 出力の時間応答は $y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega}\mathrm{d}\omega$

$u(t)$に角周波数ωの**複素正弦波**が含まれていれば，出力$y(t)$にも同じ角周波数ωの**複素正弦波**が含まれる．その振幅比が$G(j\omega)$で与えられる.

$|G(j\omega)| \to 20\log_{10}|G(j\omega)|$ [dB]

$G(j\omega)$:周波数伝達関数

入力$u(t)$を複素正弦波$X_0e^{j\omega t}$としたとき
定常状態における出力$y(t)$の$u(t)$に対する振幅比を表す。

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi} \qquad \varphi = \angle G(j\omega)$$

振幅・ゲイン

位相のずれ

7.1　正弦波入力に対する定常応答

伝達関数 $G(s)$ は多項式で表されるとする.

$A(s) = 0$ の根 λ_i に重根は無く，
その実部はすべて負であるとする.

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}, \qquad n \geq m$$

つぎの複素正弦波入力を印加することを考える.

$$u(t) = X_0 e^{j\omega t} \qquad U(s) = \frac{X_0}{s - j\omega}$$

出力は

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{X_0}{s - j\omega}$$

これは部分分数に展開できる。

$$Y(s) = \frac{C_0}{s - j\omega} + \frac{C_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{C_n}{s - s_n}$$

$$C_0 = \lim_{s \to j\omega} \frac{B(s)}{A(s)} X_0 = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} X_0 \equiv G(j\omega) X_0$$

$$C_i = \lim_{s \to s_i} (s - s_i) \frac{B(s)}{A(s)} \frac{X_0}{s - j\omega} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

7.1　正弦波入力に対する定常応答

逆変換すると

$$y(t) = C_0 e^{j\omega t} + C_1 e^{s_1 t} + \cdots + C_n e^{s_n t}$$

時間が経つと第2項以降はすべて０になる。

$$y(t) = G(j\omega)X_0 e^{j\omega t} = G(j\omega)u(t)$$

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} + j\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = |G(j\omega)|e^{j\varphi}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{G(j\omega)\})^2 + (\mathrm{Im}\{G(j\omega)\})^2}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}$$

$$y(t) = |G(j\omega)|X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

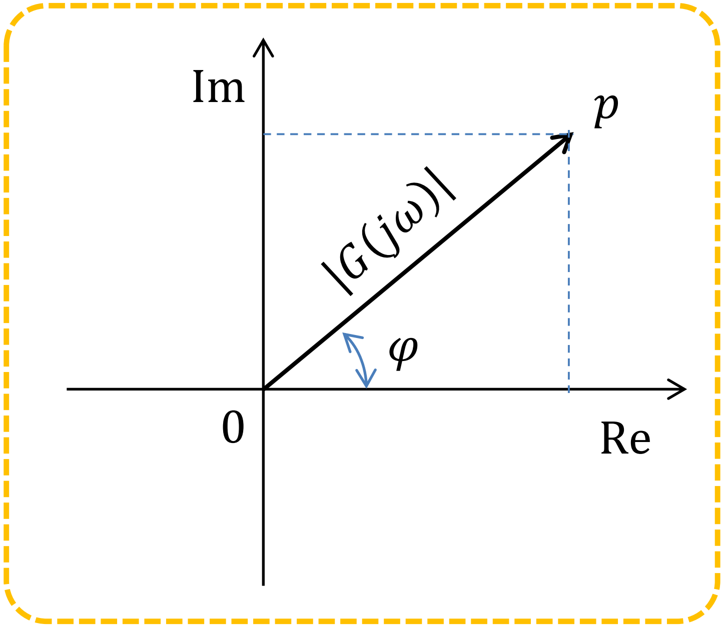
$$u(t) = X_0 e^{j\omega t} = X_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

$$= |G(j\omega)|X_0\{\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\}$$

ベクトル軌跡とは

周波数応答$G(j\omega)$は複素数。

これを複素平面上に表すと
ベクトルとして表現できる.



周波数ωを0から∞まで変化させると
ベクトルの先端pは軌跡を描く

ベクトル軌跡（vector locus）

制御系の一巡伝達関数のベクトル軌跡をナイキスト（Nyquist）線図ともよぶ。

周波数を変化させたときに，システムがどのように振る舞うのかを知る.
安定性を知る.

7.2　ベクトル軌跡

(a) 比例要素

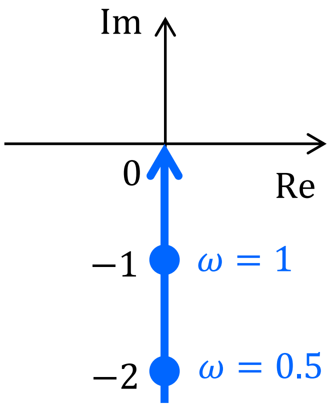
周波数伝達関数 $G(j\omega) = K$ （定数）であるので
そのベクトル軌跡は実軸上の１点 $(K, 0)$

(b) 積分要素

周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}$$

であるので，そのベクトル軌跡は実軸上の半直線.

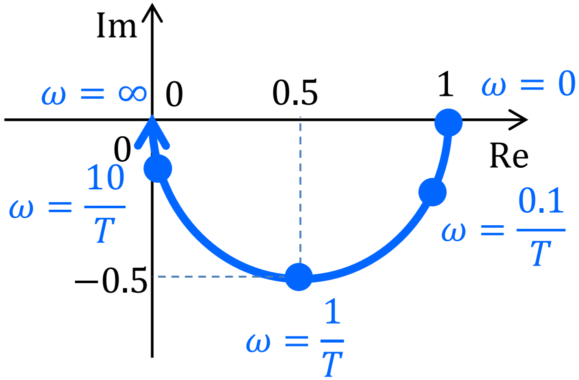


(c) １次遅れ要素

周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

であるので，そのベクトル軌跡は複素平面の第４象限の実軸上の点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とした半径 $\frac{1}{2}$ の半円.



7.2　ベクトル軌跡

(c) ２次遅れ要素　$G(s)=\dfrac{1}{1+2\zeta Ts+(Ts)^2}$

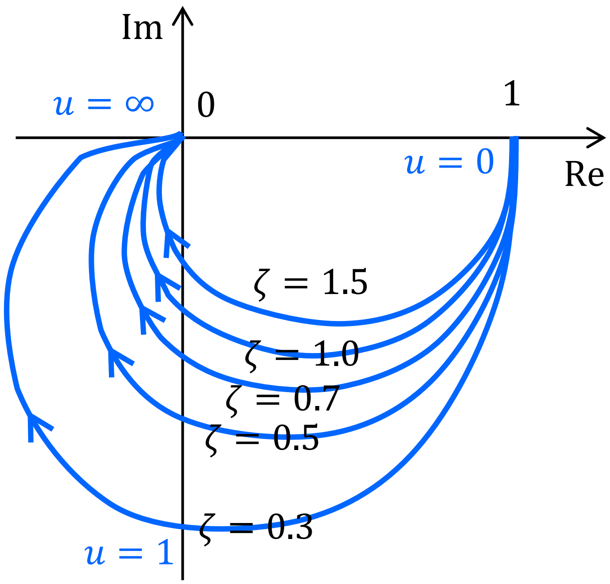
周波数伝達関数は

$$G(j\omega)=\frac{1}{1-(\omega T)^2+j2\zeta\omega T}$$

$\omega T=u$ とおくと

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\zeta u)^2}}$$

$$\varphi=-\tan^{-1}\frac{2\zeta u}{1-u^2}$$



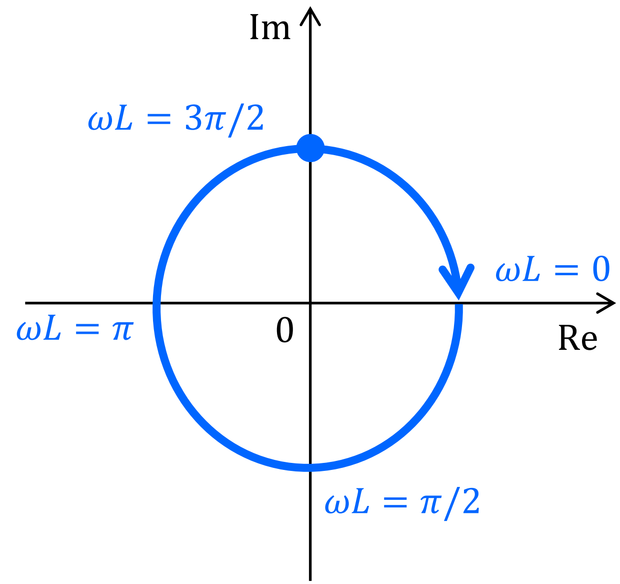
7.2　ベクトル軌跡

(d) むだ時間要素　$G(s) = e^{-Ls}$

$$s = j\omega$$

$$G(j\omega) = e^{-j\omega L} \qquad |G(j\omega)| = 1$$

$$\varphi = -\omega L$$



(e) その他

pp.68-69　参照