第9回 フィードバック制御（１）

9.1　制御系の安定条件

フィードバック制御系の目的：　外乱の影響を抑制し，制御量を目的値に一致させること

- 制御系が**安定**（stable）

  目標値または外乱の変化によって制御系内に発生した過渡現象が時間の経過とともに減衰し，一定の状態に落ち着くこと

- 制御系が**不安定**（unstable）

  過渡現象が時間の経過と共に増大し発散する

- **安定限界**（stability limit）

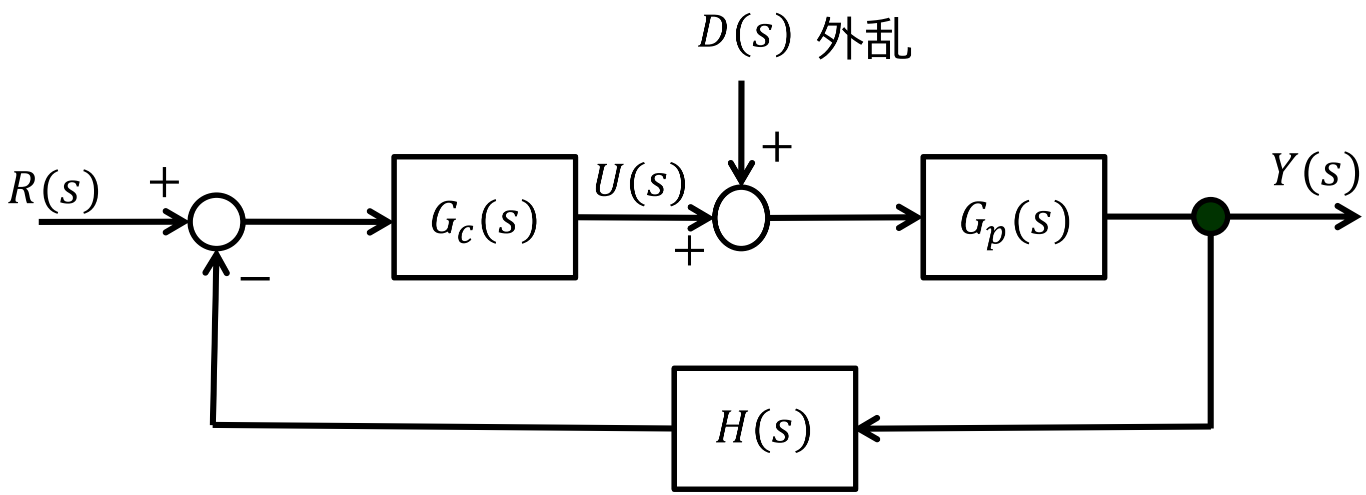
  安定と不安定の限界状態

↓

安定判別法（stability criterion）

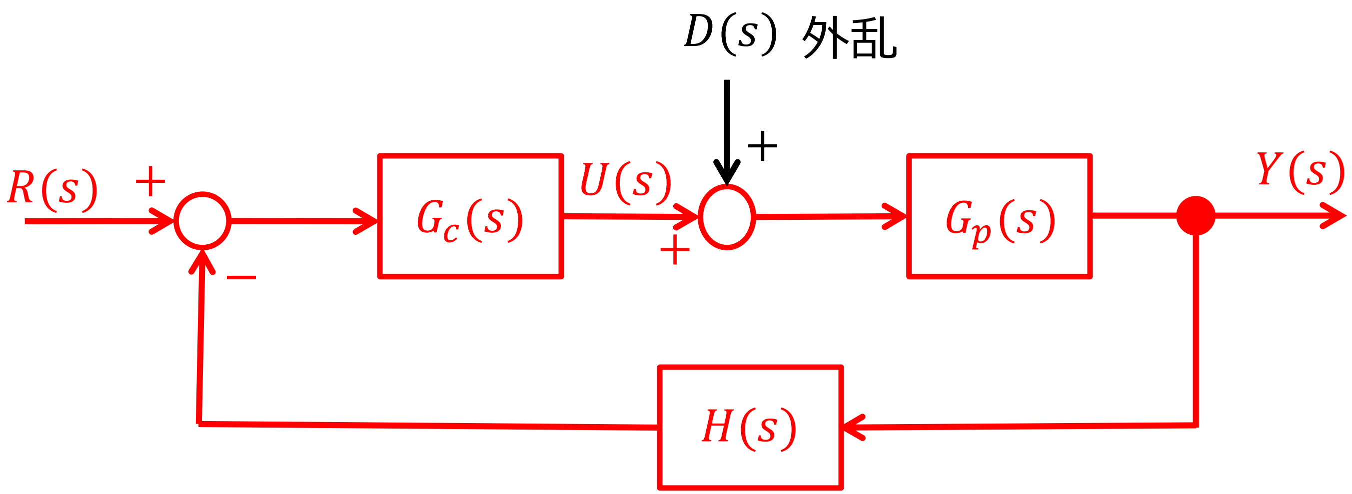
9.1　制御系の安定条件

このフィードバック制御系の安定性について考えてみよう



$$G_c(s) = \frac{s-\alpha}{s+\beta} \qquad G_p(s) = \frac{1}{s-\alpha} \qquad H(s) = 1 \qquad \alpha, \beta > 0$$

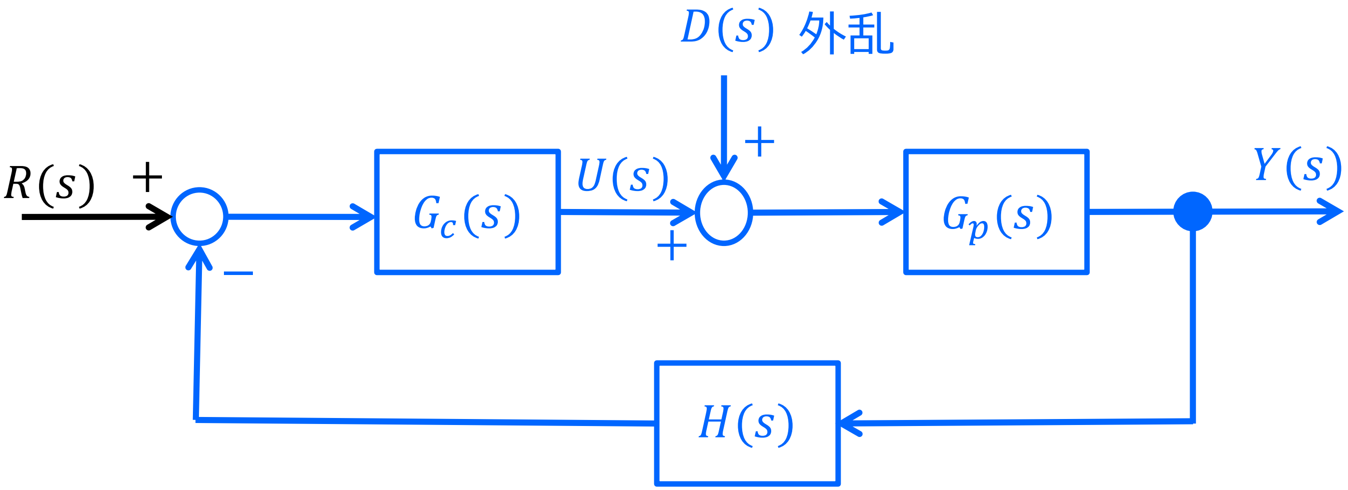
9.1　制御系の安定条件



$D(s)$を無視した
伝達関数

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s)$$

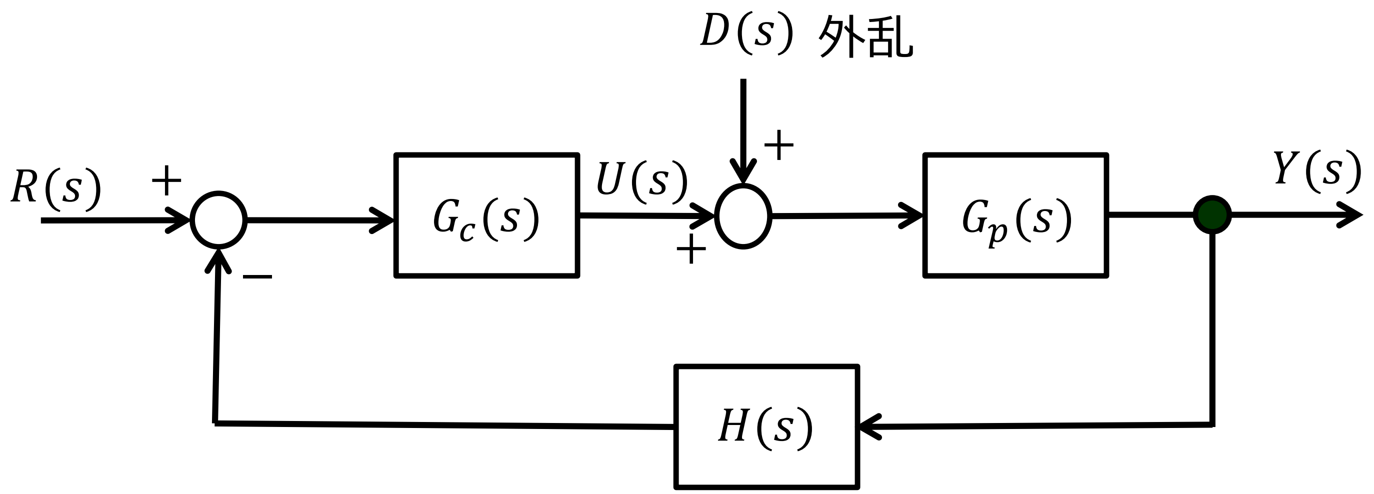
9.1　制御系の安定条件



$R(s)$を無視した伝達関数

$$Y(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} D(s)$$

9.1　制御系の安定条件



合わせると

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s) + \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}D(s)$$

$$= \frac{1}{s+\beta+1}R(s) + \frac{s+\beta}{(s-\alpha)(s+\beta+1)}D(s)$$

伝達関数の分母= 0の根を極（pole）
分子= 0の根を零点（zero）と呼ぶ.

9.1　制御系の安定条件

ここで　$R(s) = r_0$　$D(s) = d_0$　（大きさが一定のインパルス関数）

$$Y(s) = \frac{1}{s+\beta+1} r_0 + \frac{s+\beta}{(s-\alpha)(s+\beta+1)} d_0$$

$$= \frac{1}{s+\beta+1} r_0 + \frac{c_1}{s-\alpha} d_0 + \frac{c_2}{s+\beta+1} d_0$$

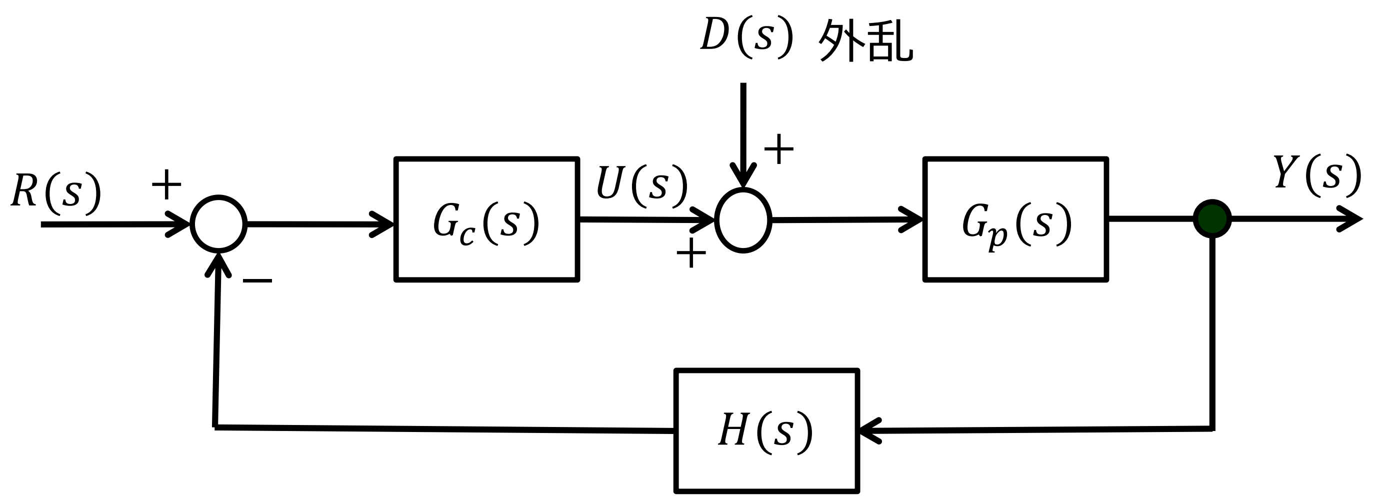
$\mathcal{L}^{-1}$

$$c_1 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+1}, \qquad c_2 = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$$

$$y(t) = \underbrace{e^{-(\beta+1)t} r_0}_{t\to\infty\text{で減衰}} + \underbrace{c_1 e^{\alpha t} d_0}_{t\to\infty\text{で発散}} + \underbrace{c_2 e^{-(\beta+1)t} d_0}_{t\to\infty\text{で減衰}}$$

系の応答は極に支配される．
極の実部が負の場合には応答が減衰する．
極の実部が正の場合には応答が発散する．

9.1　制御系の安定条件



目標値$R(s)$から操作量$U(s)$，外乱$D(s)$から操作量$U(s)$の伝達関数

$$U(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_p(s)H(s)G_c(s)}R(s) + \frac{-G_p(s)H(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)H(s)G_c(s)}D(s)$$

$$= \frac{s - \alpha}{s + \beta + 1}R(s) - \frac{1}{s + \beta + 1}D(s)$$

伝達関数の分母= 0の根を極（pole）
分子= 0の根を零点（zero）と呼ぶ.

9.1　制御系の安定条件

ここで　$R(s) = r_0$　$D(s) = d_0$　（大きさが一定のインパルス関数）

$$Y(s) = \frac{s-\alpha}{s+\beta+1} r_0 - \frac{1}{s+\beta+1} d_0$$

$$= r_0 + \frac{1-\alpha+\beta}{s+\beta+1} r_0 - \frac{1}{s+\beta+1} d_0$$

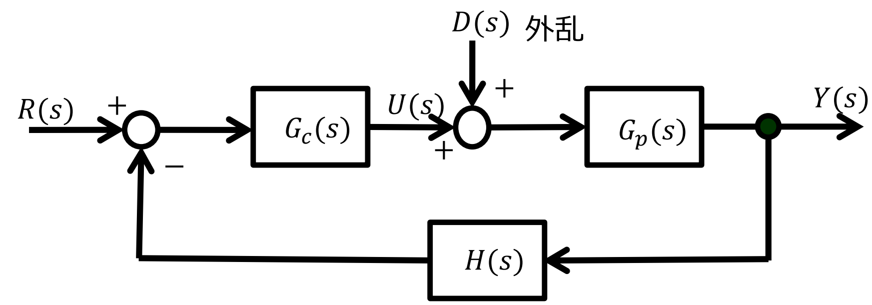
$$\Big\Downarrow\ \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \underbrace{r_0\delta(t) + (1-\alpha+\beta)e^{-(\beta+1)t} r_0}_{t\,\to\,\infty\text{で減衰}} + \underbrace{e^{-(\beta+1)t} d_0}_{t\,\to\,\infty\text{で減衰}}$$

系の応答は極に支配される．
極の実部が負の場合には応答が減衰する．
極の実部が正の場合には応答が発散する．

9.1　制御系の安定条件

内部安定性



フィードバック制御系が安定に動作するためには,

①$R(s)$から$Y(s)$　　$G_{yr}(s)=\dfrac{G_p(s)G_c(s)}{1+G_p(s)H(s)G_c(s)}$

②$D(s)$から$Y(s)$　　$G_{yd}(s)=\dfrac{G_p(s)}{1+G_p(s)H(s)G_c(s)}$

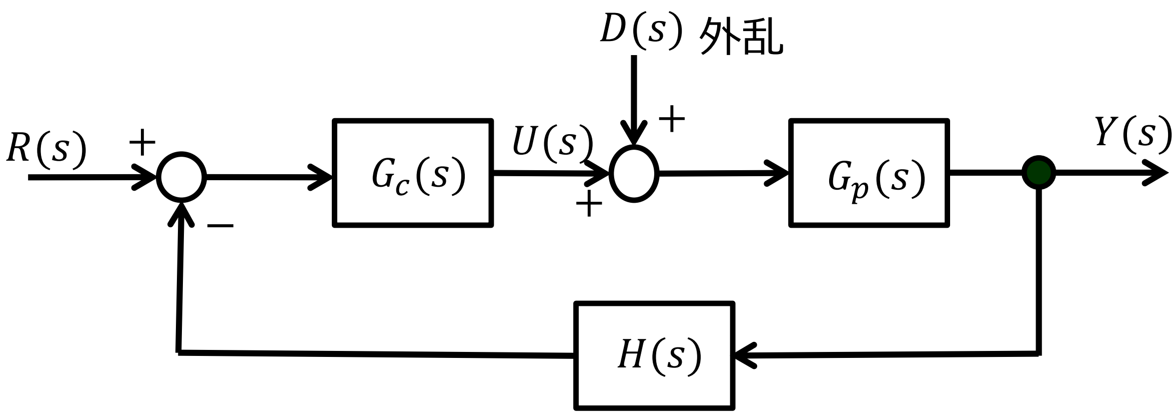
③$R(s)$から$U(s)$　　$G_{ur}(s)=\dfrac{G_c(s)}{1+G_p(s)H(s)G_c(s)}$

④$D(s)$から$U(s)$　　$G_{ud}(s)=\dfrac{-G_p(p)H(s)G_c(s)}{1+G_p(s)H(s)G_c(s)}$

に至る経路の4つの伝達関数がすべて安定なければならない.

$G_p(s)$の不安定な極が$G_c(s)$の零点で相殺されるような場合には
内部安定性は保証されない

9.1　制御系の安定条件



安定性の条件

1. 不安定な極が零点で相殺されない

2. 一巡伝達関数の分母を0とした方程式（特性方程式）

$$1 + G_p(s)H(s)G_c(s) = 0$$

の根がすべて負の実数部を持つこと

9.1　制御系の安定条件

証明　$R(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$　$, D(s) = 1$　$G_c(s)$と$G_p(s)$をまとめて$G(s)$とおく

$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)} \equiv \frac{\beta_0 s^{nN} + \beta_1 s^{nN-1} + \cdots + \beta_{nN}}{s^{nM} + \alpha_1 s^{nM-1} + \cdots + \alpha_{nM}} \quad ; n_M > n_N$$

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \equiv \frac{\delta_0 s^{nQ} + \delta_1 s^{nQ-1} + \cdots + \delta_{nQ}}{s^{nP} + \gamma_1 s^{nP-1} + \cdots + \gamma_{nP}} \quad ; n_P \geq n_Q$$

$$Y(s) = G_{yr}(s)R(s) + G_{yd}(s)D(s)$$

$$= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N(s)P(s)}{M(s)P(s) + N(s)Q(s)} \equiv \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \qquad ; n = n_M + n_P$$

$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m \qquad ; m = n_N + n_P$$

9.1　制御系の安定条件

$A(s)=0$の根を$s_1\cdots s_n$（単根）とすると，部分分数展開して

$$Y(s)=\frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{s-s_i}$$

$$C_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)Y(s)=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)\frac{B(s)}{A(s)}\quad ; i=1,2,\cdots,n$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\sum_{i=1}^{n}C_i\,e^{s_i t}$$

$$e^{s_i t}=e^{\sigma_i t}e^{j\omega_i t}=e^{\sigma_i t}(\cos\omega_i t+j\sin\omega_i t)$$

$$\boxed{t\to\infty \;\Rightarrow\; e^{\sigma_i t}\to 0 \;\Rightarrow\; e^{s_i t}\to 0 \;\Rightarrow\; y(t)\to 0}$$

これが満たされるなら制御系は安定

9.1　制御系の安定条件

s_iは次の方程式の根

$$M(s)P(s)+N(s)Q(s)=0$$

⇩

$$1+\frac{N(s)Q(s)}{M(s)P(s)}=0$$

⇩

$$1+G(s)H(s)=0$$

特性方程式（characteristic equation）