制御数学

Basic Mathematics for Control Engineers

知能制御工学コース2年生　前期１Ｑ
月曜日３限・火曜日3限　選択必修　2単位
担当：西田　健　准教授

講義予定

第 1回(4/9)　信号とシステム
第 2回(4/10)　線形時不変システム
第 3回(4/16)　行列式・逆行列
第 4回(4/17)　固有値・行列のランク
第 5回(4/23)　行列の対角化
第 6回(4/24)　行列の計算
第 7回(5/1)　中間試験
第 8回(5/7)　ラプラス変換
第 9回(5/8)　ラプラス変換
第10回(5/14)　逆ラプラス変換
第11回(5/15)　逆ラプラス変換
第12回(5/21)　ｚ変換
第13回(5/22)　ｚ変換
第14回(5/28)　逆ｚ変換
第15回(6/4)　期末試験
第16回(6/5)　答案返却と解説

教科書

「信号・システム理論の基礎」
足立修一，コロナ社

「制御工学演習」
明石，今井，共立出版

注意事項

メールアドレス：nishida@cntl.kyutech.ac.jp

Moodleへの登録

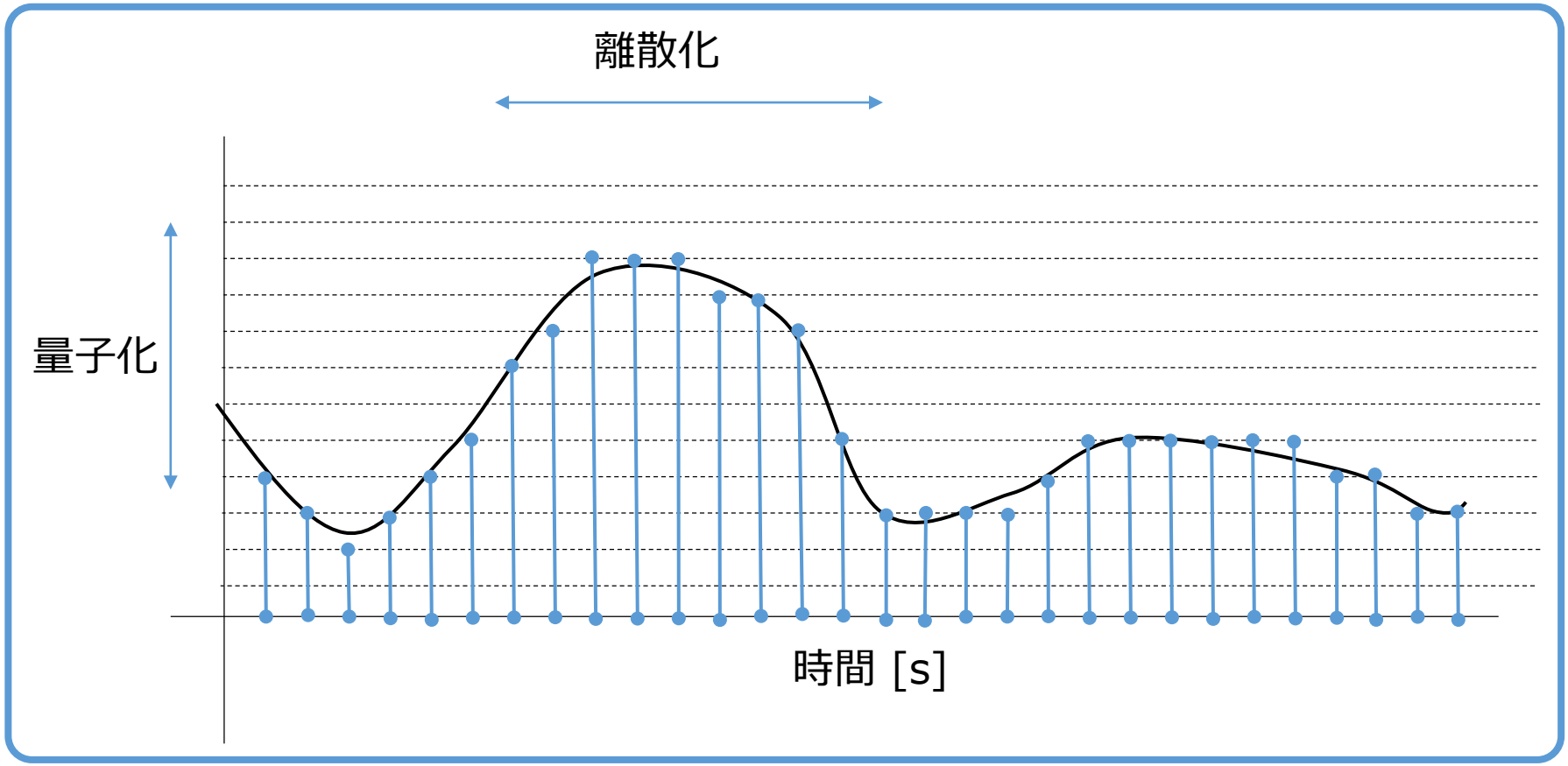
- 「moodle」を利用します.
- サーチエンジンで「moodle」「九工大」「戸畑」で検索.
- 質問があったらmoodleでも受け付けます.
- 演習問題もmoodleに掲載します.

1.1 信号の分類

信号（signal）：物理系の状態に関する情報をなんらかの方法で伝達する量

離散化（discretization）：連続した信号をとびとびの値に分割すること。

量子化（quantization）：連続信号を離散値で近似的に表現すること。



1.1 信号の分類

取り扱う時間が連続か離散かによって信号を分類

連続時間信号（continuous-time signal）

- **アナログ信号**（analog signal）　連続振幅
- **多値信号**（multi-level signal）　離散振幅

離散時間信号（discrete-time signal）

- **サンプル値信号**（sampled signal）：離散間隔でサンプルされた信号
- **ディジタル信号**（digital signal）：サンプル値信号を量子化した信号

システム（system）入力信号$x(t)$を出力信号$y(t)$に写像するもの

連続時間システム（continuous-time system）

離散時間システム（discrete-time system）

1.2 基本的な連続時間信号

1.2.1 正弦波信号（sinusoidal signal）

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

t：時間[s]

A：振幅（magnitude）

ω_0：角周波数（angular frequency）［rad/s]

ϕ：位相（phase）［rad]

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

f_0：周波数（frequency）［Hz]

周期性

すべてのtに対して

$$x(t) = x(t + T)$$

が成り立つような整数Tが存在するとき，信号$x(t)$は**周期**Tの**周期信号**と呼ばれる.

またこの式を満たすTは無数存在するが，その中で最小の整数T_0を**基本周期**と呼ぶ。

また，基本周期に対応するω_0を**基本角周波数**と呼ぶ.

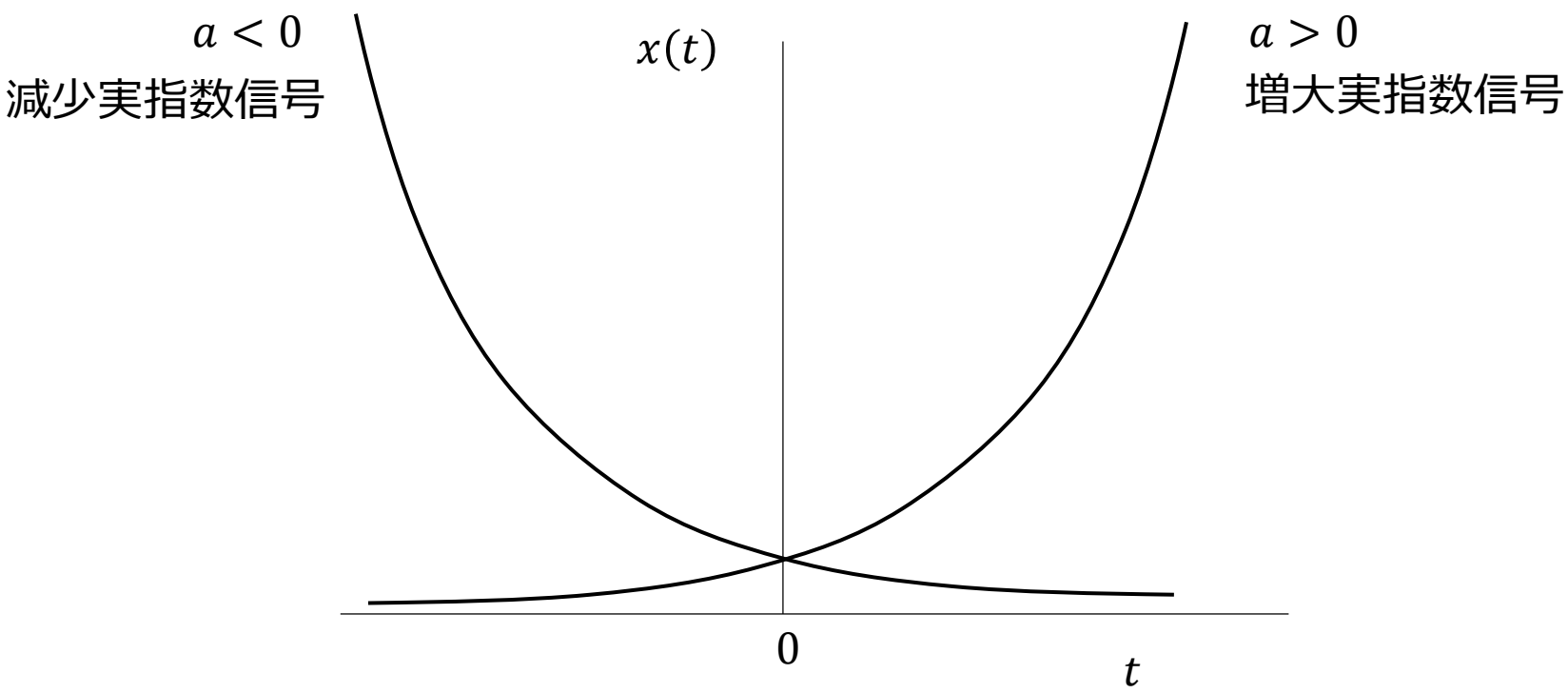
$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{1}{|f|}$$

1.2 基本的な連続時間信号

1.2.2 複素指数信号（complex exponential signal）

$$x(t) = Ce^{at}$$

（1） Cとaがともに実数の場合



1.2 基本的な連続時間信号

1.2.2 複素指数信号（complex exponential signal）

$$x(t) = Ce^{at}$$

（2） aが純虚数の場合

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \qquad C = 1, \quad j = \sqrt{-1}$$

絶対値　$|x(t)| = 1, \forall t$

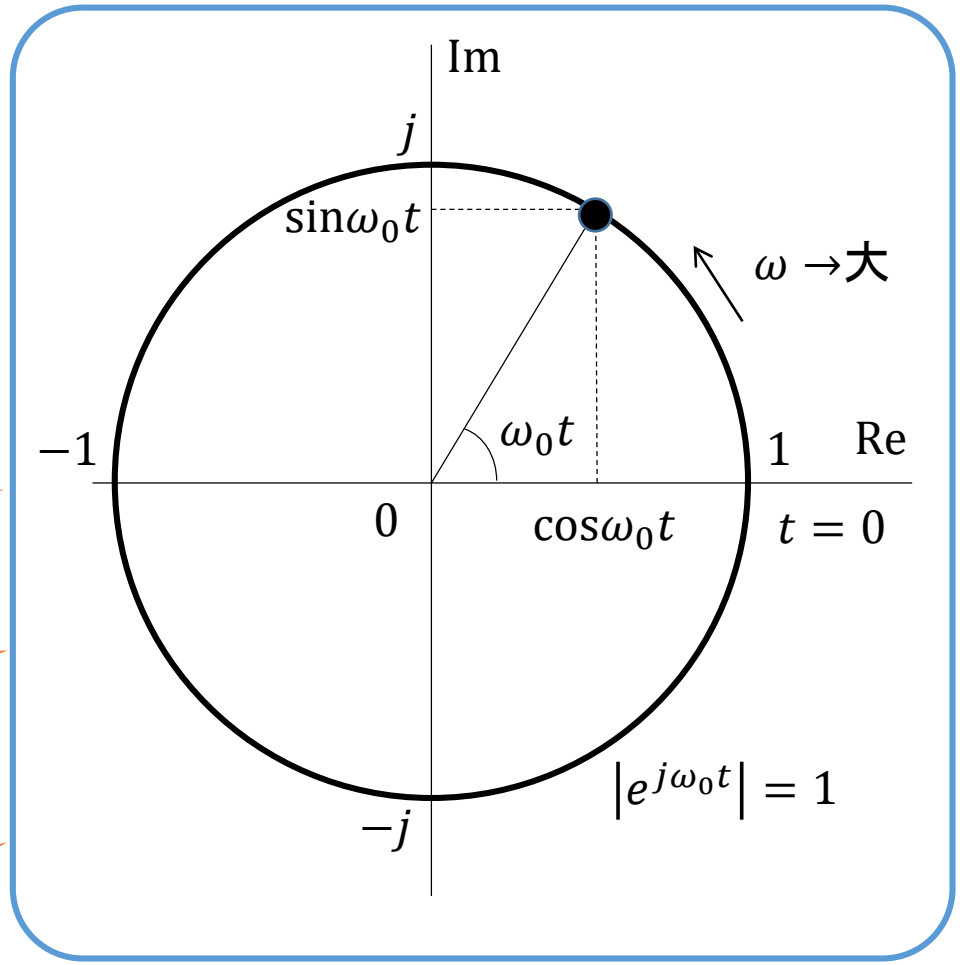
偏角　$\angle x(t) = \omega_0 t$

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

オイラーの関係式

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$



（２） aが純虚数の場合

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$
$$e^{-j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$
$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}\left(e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}\right)$$
$$A\sin(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{j2}\left(e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} - e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A \cdot \mathrm{Re}[e^{j(\omega_0 t + \phi)}]$$
$$A\sin(\omega_0 t + \phi) = A \cdot \mathrm{Im}[e^{j(\omega_0 t + \phi)}]$$

1.2 基本的な連続時間信号

1.2.2 複素指数信号（complex exponential signal）

（3） Cとaがともに複素数の場合

$$x(t) = Ce^{at}$$

$C = |C|e^{j\theta}$ ：周期的複素指数信号

$a = \sigma + j\omega_0$：複素数

$$x(t) = |C|e^{j\theta}e^{(\sigma+j\omega_0)t} = |C|e^{\sigma t}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

$$= |C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$= |C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{\sigma t}\cos\left(\omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

（a）$\sigma < 0$のとき　減衰正弦波

（b）$\sigma = 0$のとき　正弦波

（c）$\sigma > 0$のとき　増加正弦波

1.2 基本的な連続時間信号

1.2.4 単位インパルス信号（unit impulse signal）

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & \text{if } 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{otherwith} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\,(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

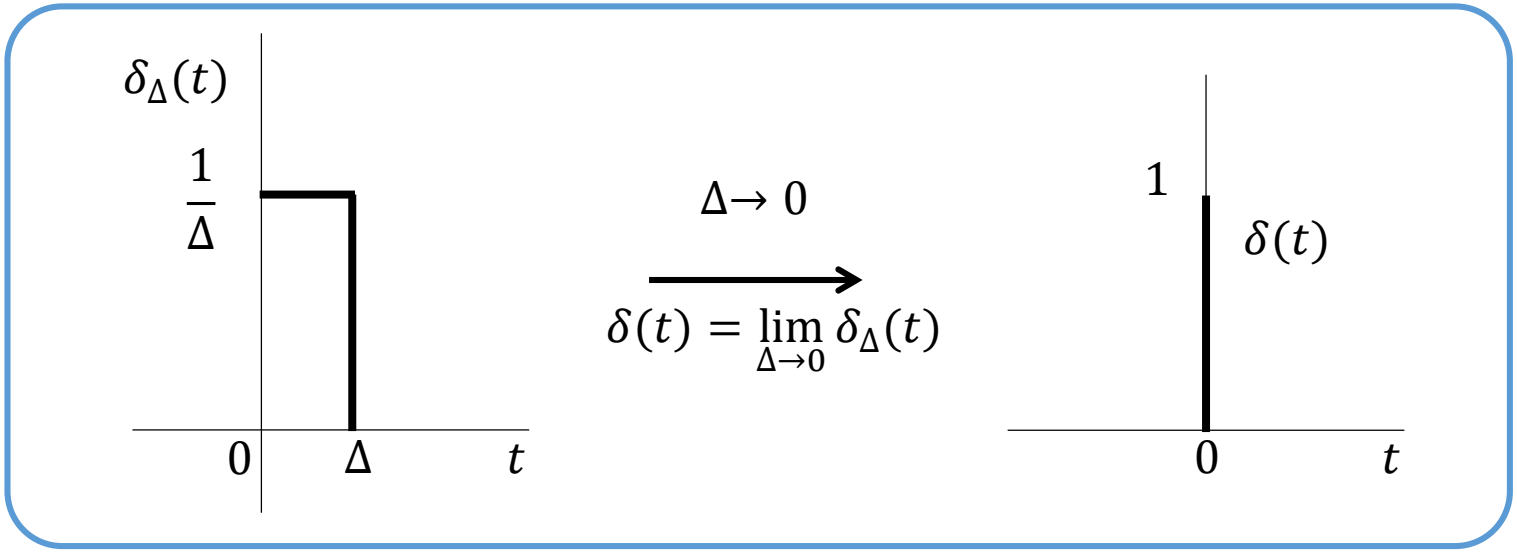
単位インパルス信号は
単位面積を持つ.

$$\delta(t) = 0, \text{if } t \neq 0$$

原点以外では単位インパルス信号
の値は0である.

任意の信号$x(t)$に対して以下が成立する.

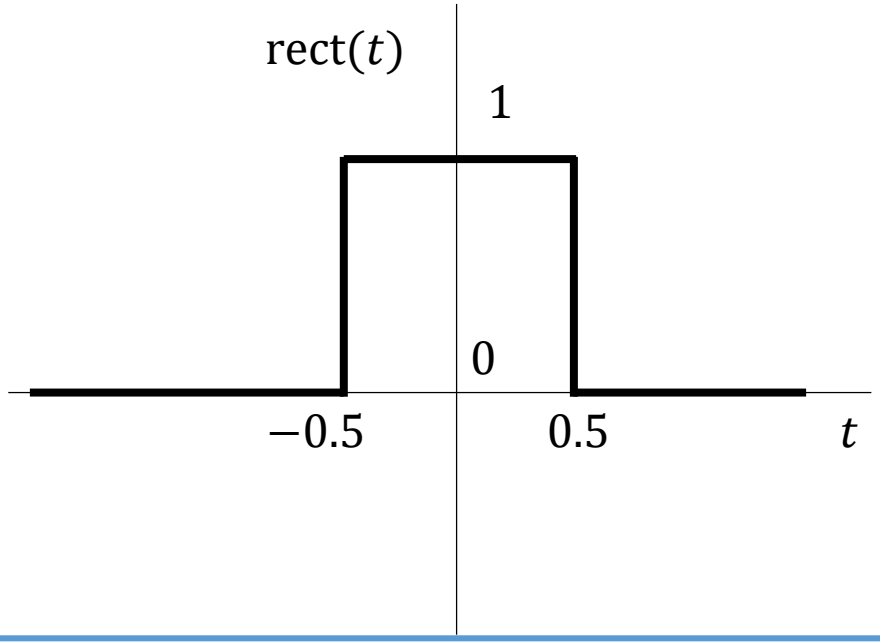
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = x(a) \qquad x(t)\delta(t-a)=x(a)\delta(t-a)$$



1.2 基本的な連続時間信号

1.2.5 矩形信号（rectangle signal）

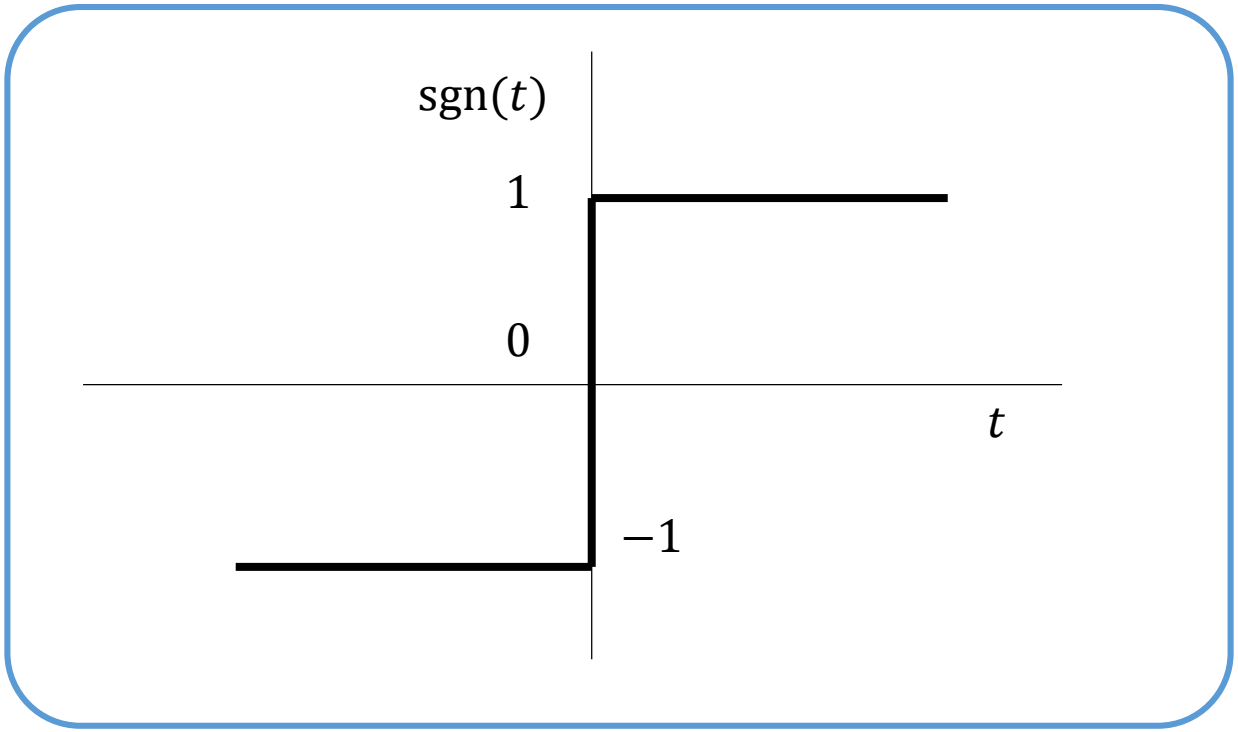
$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 0.5 \\ 1, & |t| < 0.5 \end{cases}$$



1.2 基本的な連続時間信号

1.2.6 符号信号

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



1.3 基本周期

二つの正弦波の信号の和

$$f(t) = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t$$

が，周期Tの周期信号であるためには，周波数の比が次式のように有理数にならなければならない．

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}$$

例題）　$f(t) = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}$

$$\cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4} = \cos\frac{t+T}{3} + \cos\frac{t+T}{4} \qquad \cos(t + 2\pi m) = \cos t$$

$$\frac{T}{3} = 2\pi m \qquad \frac{T}{4} = 2\pi n \qquad T = 6\pi m = 8\pi n$$

$$m = 4, \quad n = 3, \quad T = 24\pi$$

1.4 信号の分解

信号$x(t)$が

$$x(-t) = x(t)$$

を満たすとき、**偶信号**（even signal）と呼ばれる.

$$x(-t) = -x(t)$$

を満たすとき、**奇信号**（odd signal）と呼ばれる.

任意の信号$x(t)$は，偶信号の部分$\mathcal{EV}\{x(t)\}$と奇信号の部分$\mathcal{OD}\{x(t)\}$の和に分解することができ，これを偶奇分解という.

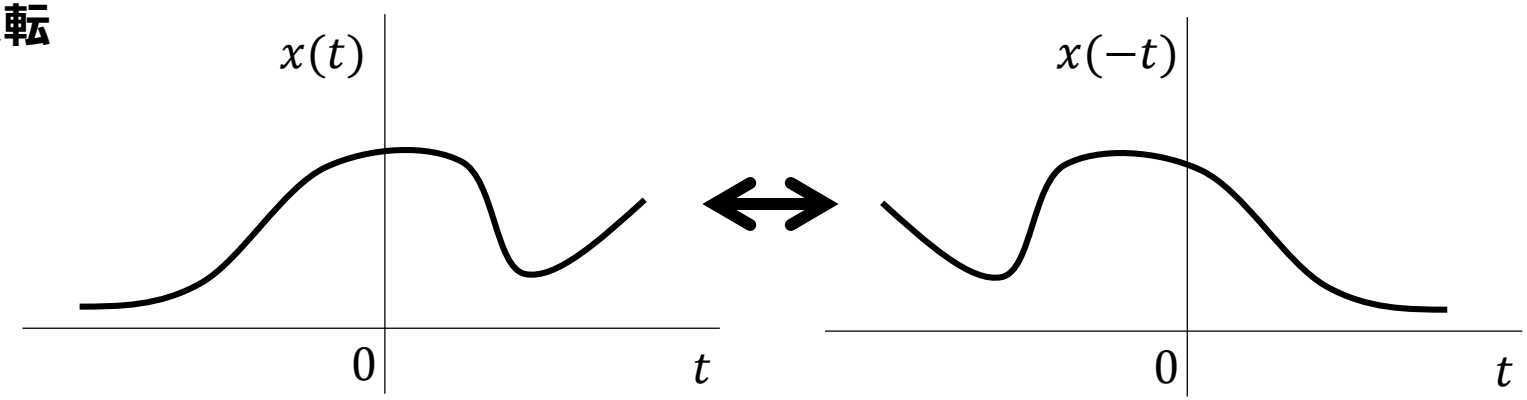
$$x(t) = \mathcal{EV}\{x(t)\} + \mathcal{OD}\{x(t)\}$$

$$\mathcal{EV}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$$

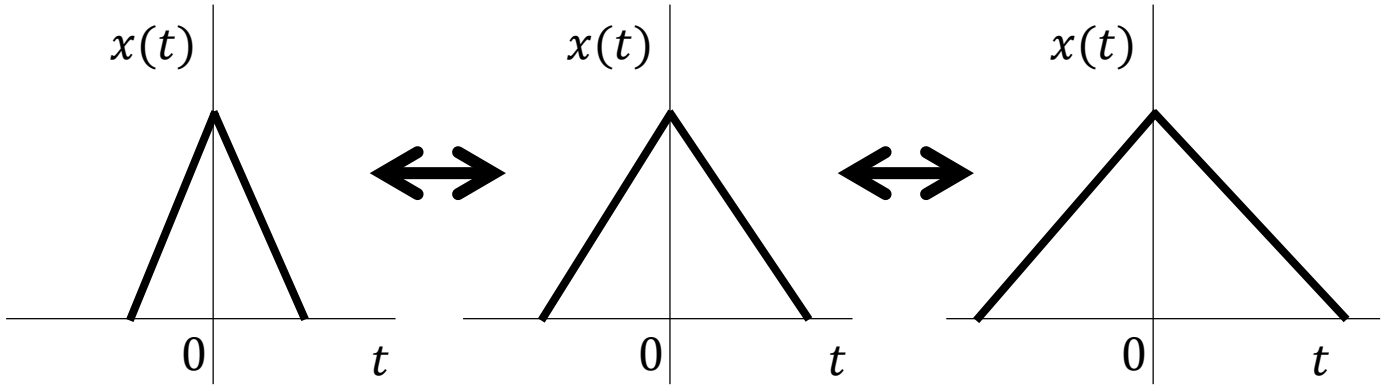
$$\mathcal{OD}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$$

1.5 信号の操作

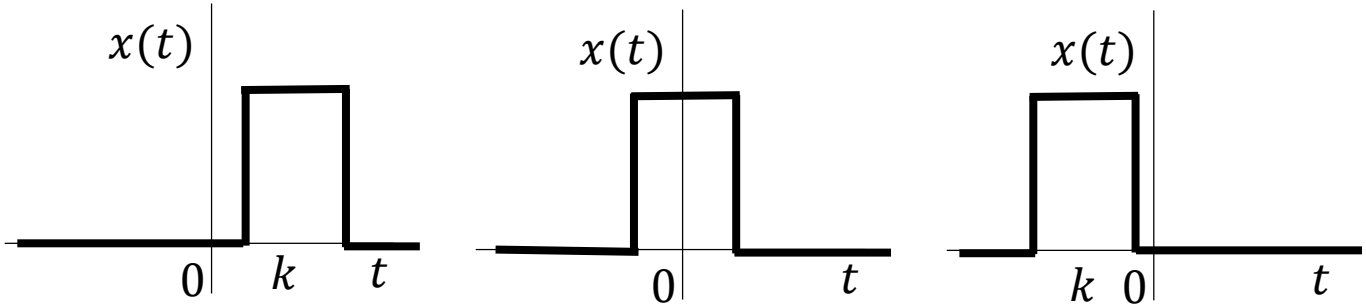
（1）信号の反転



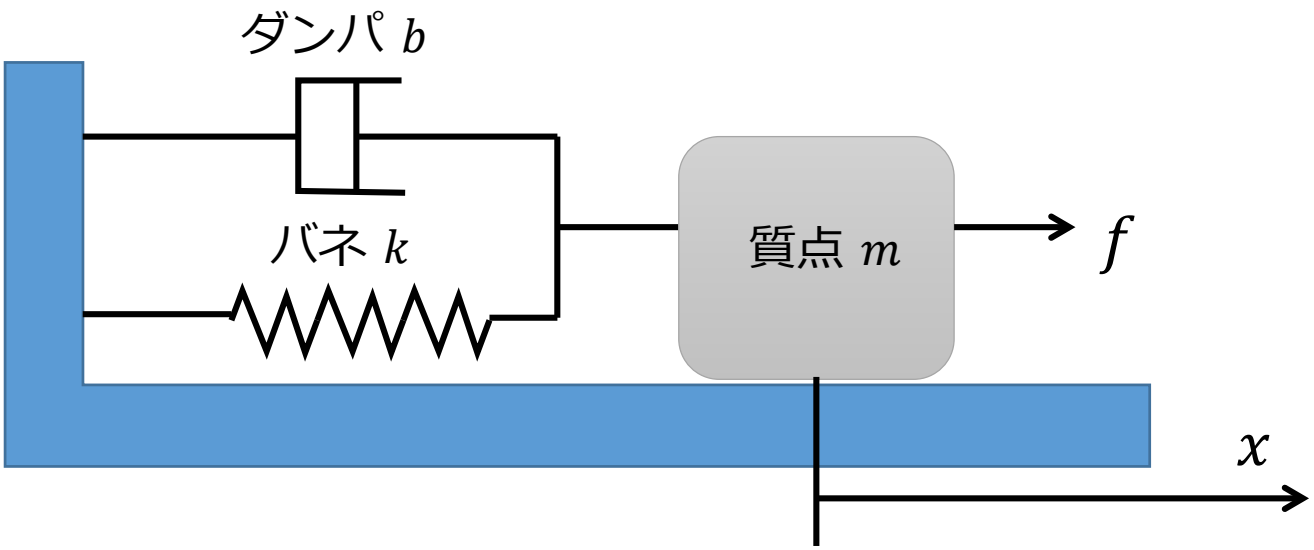
（2）時間軸スケーリング



（3）時間軸推移

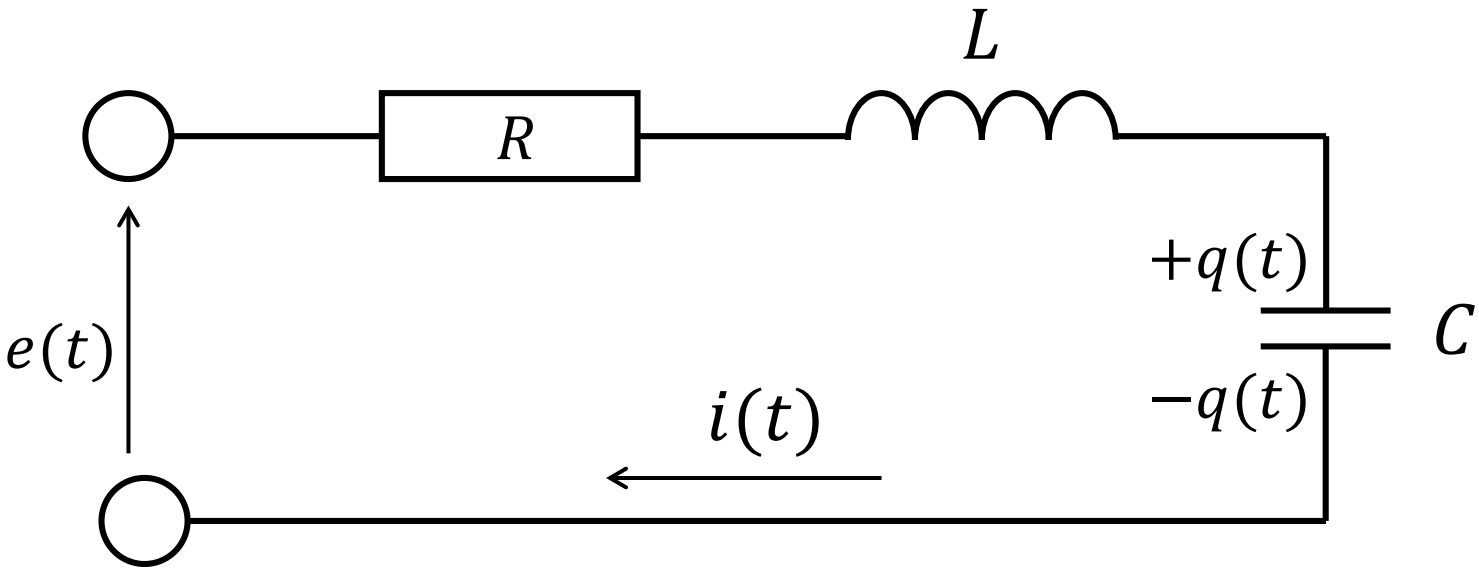


力学システム（mechanical system）



$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+kx(t)=f(t)$$

電気回路 (electric circuit)



$$L\frac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q(t) = e(t)$$