行列式と逆行列

Determinant and inverse matrix

11.1　行列式の列に関する性質

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

行列式（determinant）

$$\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \boldsymbol{M}_{ij}$$

$\boldsymbol{M}_{ij}$は，　$\boldsymbol{A}$の第 i 行と第 j 列を省いてできた
$(n-1) \times (n-1)$次元の行列の行列式

余因子行列（adjoint matrix）

$$\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \boldsymbol{M}_{ji}$$

11.1　行列式の列に関する性質

❶ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$　$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \qquad |a\boldsymbol{A}| = a^n|\boldsymbol{A}|$$

❷ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$の固有値を$\lambda_i\ (i = 1, \cdots, n)$とすると

$$|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ は　$\lambda_i \neq 0\ (\forall i)$ と等価

❸ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| \ \ (|\boldsymbol{A}| \neq 0\text{のとき})$$

$$= |\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}| \ \ (|\boldsymbol{D}| \neq 0\text{のとき})$$

とくに$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$または$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$の場合には無条件に

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|$$

❹ $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$|\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BC}| = |\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{CB}|$$

とくに$m = 1$のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$c \in \mathbb{R}^{1\times n}$に対して

$$|\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{bc}| = 1 + \boldsymbol{cb}$$

11.1　行列式の列に関する性質

❶
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

❷
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

❸
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

❹
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

❺
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l}\pm ca_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nk}\pm ca_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

11.2　行列式の行に関する性質

❶

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

❷

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

❸

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

11.2　行列式の行に関する性質

❹

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

❺

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} \pm a_{k1} & a_{l2} \pm ca_{k2} & \cdots & a_{ln} \pm ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

11.2　行列式の行に関する性質

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$ の値を求めよ

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 1 \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24\{1 \times 1 - 2 \times (-2)\} = 24 \times 5 = 120$$

11.3　逆行列

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$（または$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}$）を満たす正方行列$\boldsymbol{X}$を
$\boldsymbol{A}$の逆行列（inverse matrix）といい，$\boldsymbol{A}^{-1}$と書く．

正方で行列式が零でない行列についてだけ定義できる．

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$$

1. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$　$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$　$|\boldsymbol{A}| \neq 0$　$|\boldsymbol{B}| \neq 0$

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

2. $(a\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}/a$

3. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = 1/|\boldsymbol{A}|$

11.3　逆行列

❹ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$　　$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$　のとき

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}^{-1} \\ -\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{S}^{-1} \end{bmatrix}$$

ただし$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

($|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $|\boldsymbol{S}| \neq 0$ のとき)

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{-1} & -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

ただし$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$
($|\boldsymbol{D}| \neq 0$, $|\boldsymbol{K}| \neq 0$ のとき)

とくに$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$または$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$で$|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $|\boldsymbol{D}| \neq 0$ のと無条件に

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

11.3　逆行列

❺　$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$　$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$　$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$　$|\boldsymbol{A}| \neq 0$　のとき

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$$

とくに$m = 1$のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$c \in \mathbb{R}^{1\times n}$に対して

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}}$$

特別な場合として

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}$$