行列のランクと固有値

rank of matrix and eigenvalue

12.1　行列の転置

行列の転置

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

転置行列(transposed matrix)

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

対称行列(symmetric matrix)

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$$

歪対称行列(skew symmetric matrix)

$$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$$

① $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

② $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$のとき　$|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$　$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}^T) = [\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})]^T$

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ならば, $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$

③ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$のとき　$\boldsymbol{A}$ と$\boldsymbol{A}^T$の固有値は等しい.

12.2　ベクトルの線形独立

※　列ベクトルについて考えるが，行ベクトルについても同様

$\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \cdots, l)$が**線形独立**（linearly independent)であるとは，
未知のスカラ係数 α_i $(i = 1, \cdots, l)$ を用いた次式

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_l \boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{0}$$

において，　$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_l = 0$　の他に解が無いことをいう．

$\Updownarrow$

線形従属（linearly dependent)

12.2　ベクトルの線形独立

線形従属・独立の例題

① $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$

線形従属

② $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{v}_2$は$\boldsymbol{v}_1$のスカラ倍で表されない

線形独立

③ $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

どのひとつのベクトルも他の二つのベクトルの線形結合で表すことができない　**線形独立**

- n次元ベクトルにおいて，$n+1$本以上のベクトルは必ず線形従属になる．
- 線形独立なn本のn次元ベクトルを，n次元ベクトル空間の**基底ベクトル**という．

12.3 行列のランク

r 次元の小行列式（minor）

行列から何個かの行と列を除いた残りの要素で作った $r \times r$ 次元の正方行列の行列式

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の $r+1$ 次元の小行列式がすべて零で
かつ，r の小行列式の中には零でないものがあるとき
$\boldsymbol{A}$ のランク（rank）を r といい，

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r$$

と書く．階数，位数とも呼ばれる．

12.3 行列のランク

行列のランクの性質

① 列式の二つの行（または列）を入れ替えても，
ある行（または列）に別の行（または列）を定数倍して加えてもランクは不変.

② 列式ある行（または列）をa倍してもランクは不変.

③ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$　のとき，　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \min(n, m)$

④ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$　のとき，　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$ の必要十分条件は　$|\boldsymbol{A}| \neq 0$

⑤ $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^T) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

⑥ $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \min\big(\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}), \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})\big)$

⑦ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,　$|\boldsymbol{A}| \neq 0$,　$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ のとき $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$
$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,　$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ のとき $\mathrm{rank}(\boldsymbol{BA}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$

ベクトルの線形独立性と行列のランクとの関係

① 列ベクトル $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1} (i = 1 \cdots l)$ が線形独立であることと

$$\boldsymbol{T} = [\,\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_l] \in \mathbb{R}^{n\times l}$$

のランクが l であることは等価である.

特に，$l = n$ のときには $|\boldsymbol{T}| \neq 0$ と等価である.

② 行ベクトル $\boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^{1\times n} (i = 1 \cdots l)$ が線形独立であることと

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times n}$$

のランクが l であることは等価である.

特に，$l = n$ のときには $|\boldsymbol{U}| \neq 0$ と等価である.

③ ある行列$\boldsymbol{A}$のランクは$\boldsymbol{A}$の各列（または行）を一つの列ベクトル（または行ベクトル）とみなしたとき，それらの中で線形独立な列ベクトル（または行ベクトル）の数に等しい.

12.3 行列のランク

ランクを求める例題

（1）$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{② + 2 \times ①} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = 1$

（2）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③ + ①]{② - 2 \times ①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{③ + 3 \times ②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$

12.3 行列のランク

(3) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-4\times①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = 2$

(4) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+3\times①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank} \boldsymbol{C} = 1$

(5) $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③+②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank} \boldsymbol{Y} = 2$

12.3 行列のランク

線形結合の例題

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\7\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

これらが線形従属であることを示し，
$\boldsymbol{a}_3$を$\boldsymbol{a}_1$と$\boldsymbol{a}_2$の線形結合で表せ.

$$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad (\text{未知数：}c_1,\ c_2,\ c_3)$$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$$

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 7 & -1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[③-2\times①]{②-4\times①} \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -1 & 3\\0 & -1 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -1 & 3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \therefore \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = 2$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -1 & 3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$以外にも解を持つ.

$$\hookrightarrow \begin{aligned} c_1 + c_2 - c_3 &= 0\\ -c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$c_3 = 1$　とおくと　$c_2 = 3$　$c_1 = -5$

12.5 固有値と固有ベクトル

正方行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ について

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0$$

これを**特性方程式**（characteristic equation）という.

これを満たすn個の根 $s = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$を $\boldsymbol{A}$ の**固有値**（eigenvalue）という.

$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{v}_i$ または $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$

を満たす $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ を λ_i についての**固有ベクトル**（eigenvector）という.

12.5 固有値と固有ベクトル

固有値に重複したものが無い（$\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i, j$）ときには

各固有値 λ_i について，係数倍を除き，唯一つの固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ が存在し，

それらの $\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n$ は線形独立となる.

このとき

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

とおくと,

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる．$\boldsymbol{\Lambda}$は**対角行列**，または**モード行列**（modal matrix）.

$\boldsymbol{T}$は**対角変換行列**.

12.5 固有値と固有ベクトル

固有値と固有ベクトルを求める例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ この行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s-4 & 2 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix}$$

$$= (s-4)(s-1) + 2$$

$$= s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 3$$

12.5 固有値と固有ベクトル

固有値と固有ベクトルを求める例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ この行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$\lambda_1 = 2$　の場合 $\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ より

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = k_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1 \neq 0)$$

$\lambda_2 = 3$　の場合 $\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ より

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta_1 - 2\beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \beta_1 = 2k_2 \\ \beta_2 = k_2 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_2 \neq 0)$$

12.5 固有値と固有ベクトル

対角化の例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ この行列を対角化せよ.

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s+1 & -2 & -1 \\ 0 & s-4 & -2 \\ 0 & 1 & s-1 \end{vmatrix}$$

$$= (s+1)(s-2)(s-3)$$

$$\therefore \lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 3$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$ とおくと $$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$