行列の対角変換

Diagonalization of matrix

転置の性質

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$のとき

① $\boldsymbol{A}$の固有値はすべて実数

② 値の異なる固有値についての固有ベクトルは線形独立で直交している.

③ 重複固有値については重複度（multiplicity）に等しい数の
線形独立な固有ベクトルが存在し，それらは直交するように選べる.

13.2　ジョルダン形式

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A}^T$かつ$\boldsymbol{A}$の固有値に重複がある場合
対角変換ができないことが多い.

この場合は，$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$をジョルダン形式 $\boldsymbol{J}$ に変換できる.

ジョルダンブロック

$$\boldsymbol{J}_p(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

ジョルダン形式の例

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1(\lambda_1) & & \\ & \boldsymbol{J}_2(\lambda_1) & \\ & & \boldsymbol{J}_2(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ジョルダン形式

何個かのジョルダンブロックを対角線上の副行列として並べたものを
ジョルダン形式と言う。

λ_1について3重、λ_2について2重の固有値を持つ行列$\boldsymbol{A}$のジョルダン形式の例

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1(\lambda_1) & & \\ & \boldsymbol{J}_2(\lambda_1) & \\ & & \boldsymbol{J}_2(\lambda_2) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc|cc} \lambda_1 & & & & \\ \hline & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & \lambda_2 \end{array}\right]$$

λ_1のジョルダンブロックとして１次と２次のものがあり
λ_2についても２次のものがある場合のジョルダン形式

13.2　ジョルダン形式

◎ 行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ について，重複度 r の固有値について

（ｉ）$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$のランクが $n-P$ であると、λ について線形独立な固有ベクトルが P 本ある.

（ii）　それらの固有ベクトルに対応する P 個のジョルダンブロックが存在する.

（iii）　各ジョルダンブロックの次数の和が重複度 r と等しい.

◎ $\boldsymbol{A}$の分類

ⓐ　すべての固有値λについて，$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$のランクが$(n-1)$となる行列を**非縮退行列**と呼ぶ.

ⓑ　ランクが $(n-2)$ 以下となる固有値が 1 つでも存在する行列を**縮退行列**と呼ぶ.

13.2　ジョルダン形式

ⓐの場合

① $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$
それらの重複度を $r_1, r_2, \cdots, r_l$　$(r_1 + r_2 + \cdots + r_l = n)$　とする.

② このとき，$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$のうち重複度が r の，ある固有値を λ とし

$$
\begin{aligned}
(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}^1 &= \boldsymbol{0} \\
(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}^2 &= -\boldsymbol{v}^1 \\
&\vdots \\
(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}^r &= -\boldsymbol{v}^{r-1}
\end{aligned}
$$

の順に$\boldsymbol{v}^1 \cdots \boldsymbol{v}^r$ を求める（$r = 1$のときは $\boldsymbol{v}^1$ だけ求める）.

③ 求めた$\boldsymbol{v}^1 \cdots \boldsymbol{v}^r$を並べて

$$\boldsymbol{T}(\lambda) = [\boldsymbol{v}^1 \quad \boldsymbol{v}^2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}^r] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

をつくる.

ⓐの場合

④　これを $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ について実行し，

$$\boldsymbol{T} \equiv [\boldsymbol{T}(\lambda_1) \quad \boldsymbol{T}(\lambda_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{T}(\lambda_l)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

がジョルダン形式への変換行列となる．

ジョルダン形式は

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1) & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{J}_{r_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

となる．

13.2　ジョルダン形式

ⓑの場合　ジョルダンブロックの次数変換行列 $\boldsymbol{T}$ は試行錯誤で求める．

ある固有値λの重複度をrとすると

$$\begin{cases} (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_1^1 = \boldsymbol{0} \\ (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_1^2 = -\boldsymbol{v}_1^1 \\ \quad\vdots \\ (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_1^{m_1} = -\boldsymbol{v}_1^{m_1-1} \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_P^1 = \boldsymbol{0} \\ (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_P^2 = \boldsymbol{0} \\ \quad\vdots \\ (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_P^{m_P} = -\boldsymbol{v}_P^{m_P-1} \end{cases}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_P = r$$

これらを満たす r 本の線形独立なベクトルを試行錯誤的に求める．

$$\boldsymbol{v}_1^1 \cdots \boldsymbol{v}_1^{m1}, \cdots, \boldsymbol{v}_P^1, \cdots, \boldsymbol{v}_P^{m_P}$$

これらのベクトルを並べて

$$\boldsymbol{T}(\lambda) \equiv \left[\boldsymbol{v}_1^1 \ \boldsymbol{v}_1^2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_1^{m_1} \ \cdots \ \boldsymbol{v}_P^1 \ \boldsymbol{v}_P^2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_P^{m_P}\right]$$

とおき，これらをすべて並べると変換行列になる．

$$\boldsymbol{T} \equiv \left[\boldsymbol{T}(\lambda_1) \quad \boldsymbol{T}(\lambda_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{T}(\lambda_l)\right]$$

13.2　ジョルダン形式

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{m_1}(\lambda_1) & & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{J}_{m_2}(\lambda_2) & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{J}_{m_P}(\lambda)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

さまざまな形が存在する

3次の正方行列の場合

① $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$　② $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2\end{bmatrix}$　③ $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 0 \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_2\end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ \boldsymbol{0} & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$　⑤ $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \lambda_1 & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_1\end{bmatrix}$

13.3　行列のトレース

トレース（trace） 正方行列について定義される対角要素の和

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T)$$

① $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$の固有値を$\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$とすると

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

② $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$のとき,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BC}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{CB})$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$$

$$\mathrm{tr}(c\boldsymbol{A}) = c\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

$m = 1$のとき

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{bc}) = \boldsymbol{cb} \qquad \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Ab} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{bb}^T\boldsymbol{A})$$

次のような性質も知られている.

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{TJT}^{-1}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{TJ}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{J})$$

13.3　2次形式と正定関数・正定行列

変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$ についての２次のべき関数

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

２次形式（quadratic form）という.

２次形式なら$\boldsymbol{A}$を対称行列として$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$と書くことができる.

例題）

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_3^2$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_1 + 6x_3^2 + 2x_3x_1$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

13.3　2次形式と正定関数・正定行列

正定	（positive definite）	$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
準正定	（semi-positive definite）	$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
準負定	（semi-negative definite）	$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
負定	（negative definite）	$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

正定関数	（positive definite function）	$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) > 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
準正定関数	（semi-positive definite function）	$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \geq 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
準負定関数	（semi-negative definite function）	$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
負定関数	（negative definite function）	$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) < 0$	$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

13.3　2次形式と正定関数・正定行列

対称行列$\boldsymbol{A}$についての２次形式$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$が正定のとき
行列$\boldsymbol{A}$を**正定行列**（positive definite matrix）

$$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{0}$$

対称行列$\boldsymbol{A}$についての２次形式$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$が準正定のとき
行列$\boldsymbol{A}$を**準正定行列**（semi-positive definite matrix）

$$\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$$

対称行列$\boldsymbol{A}$についての２次形式$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$が準負定のとき
行列$\boldsymbol{A}$を**準負定行列**（semi-negaitive definite matrix）

$$\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{0}$$

対称行列$\boldsymbol{A}$についての２次形式$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$が正定のとき
行列$\boldsymbol{A}$を**負定行列**（negative definite matrix）

$$\boldsymbol{A} < \boldsymbol{0}$$

シルベスターの判定条件

正定であるための必要十分条件は，**すべての主座小行列が正**となること.

$$a_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad \cdots, \qquad |\boldsymbol{A}| > 0$$

負定であるための必要十分条件は，主座小行列が以下のようになること.

$$a_{11} < 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \qquad \cdots, \qquad (-1)^n|\boldsymbol{A}| > 0$$

微分・積分

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$に行列$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ が時間tの関数であるとき，

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{A}}(t) = \{\dot{a}_{ij}\}, \qquad \int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \left\{ \int a_{ij}\mathrm{d}t \right\}$$

と定義する．すると，ベクトルや行列の積について，

$$\mathrm{d}t(\boldsymbol{AB}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B}\mathrm{d}t = [\boldsymbol{AB}]\Big|_a^b - \int_a^b \boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

が成り立つ．

偏微分

$J(\boldsymbol{x}(t))$を$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$のスカラ関数とするとき，偏微分を

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_1(t)} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_{n(t)}} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial^2 \boldsymbol{x}(t)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial^2 x_1(t)} & \dfrac{\partial^2 J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_1(t)\partial x_2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial^2 J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_1(t)\partial x_n(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_n(t)\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_n(t)\partial x_2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial^2 J(\boldsymbol{x}(t))}{\partial^2 x_n(t)} \end{bmatrix}$$

と定義する.
このような定義によると，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}(t)} \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}, \qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}(t)} \boldsymbol{x}(t)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \qquad \frac{\partial^2}{\partial^2 \boldsymbol{x}(t)} \boldsymbol{x}(t)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = 2\boldsymbol{A}$$

などが成り立つ.
また，$V(\boldsymbol{x}(t))$が時間関数$\boldsymbol{x}(t)$についてのスカラ関数のとき，

$$\dot{V}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) = \left[\frac{\partial V(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\right] \dot{\boldsymbol{x}}(t)$$