行列の対角変換 その2

Diagonalization of matrix part 2

14.1　行列関数とケーリー・ハミルトンの定理

スカラ変数 x についてのスカラ関数 $f(x)$ のべき乗級数展開

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

xの代わりに正方行列$\boldsymbol{A}$を代入

行列関数

$$\boxed{f(\boldsymbol{A}) = a_0 \boldsymbol{I} + a_1 \boldsymbol{A} + a_2 \boldsymbol{A}^2 + \cdots}$$

e.g.

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots$$

$$\cos \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4 - \cdots$$

$$\sin \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5 - \cdots$$

14.1　行列関数とケーリー・ハミルトンの定理

例１）

$\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$とする

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \widetilde{\boldsymbol{A}} \quad \text{とおくと}$$

① $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}^{-1}$

② $\boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}^{-1}\cdots\boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{A}}^i\boldsymbol{T}^{-1}$

③ $f(\boldsymbol{A}) = \sum_i a_i\,\boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{T}\left[\sum_i a_i\,\widetilde{\boldsymbol{A}}^i\right]\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}f\left(\widetilde{\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{T}^{-1}$

14.1　行列関数とケーリー・ハミルトンの定理

例２）

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$$

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{T}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\left\{\sum_i a_i \begin{bmatrix} \lambda_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^i \end{bmatrix}\right\}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} \sum_i a_i\,\lambda_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_i a_i\,\lambda_n^i \end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

14.1　行列関数とケーリー・ハミルトンの定理

例３）

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^nt^n + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3t^2 + \cdots = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}$$

$$\int e^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}' + \boldsymbol{I}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^2t^3 + \cdots$$

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ならば簡単に

$$\int e^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t} + \boldsymbol{C} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}'$ と $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}' - \boldsymbol{A}^{-1}$ は積分定数行列

14.1　行列関数とケーリー・ハミルトンの定理

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$の特性多項式を

$$\Delta(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

とすると，$\boldsymbol{A}$は以下の特性方程式を満たす.

$$\Delta(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n + a_n \boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_2 \boldsymbol{A} + a_1 \boldsymbol{I} = 0$$

これを**ケーリー・ハミルトンの定理**（Cayley-Hamilton theorem）という.

14.2　ベクトル空間と線形変換

ベクトル空間　V

① Vに含まれる任意のベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$に対して和算が定義され
$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$となり次の法則が成り立つ.

①-a	$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$について$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$	（交換則）
①-b	$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$について$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$	（結合則）
①-c	$\boldsymbol{0} \in V$が存在し$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$	（零元の存在）
①-d	$-\boldsymbol{x} \in V$が存在し$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$	（逆元の存在）

14.2　ベクトル空間と線形変換

（実）ベクトル空間　V

② 任意のスカラ a と $\boldsymbol{x} \in V$ について積が定義され
$a\boldsymbol{x} \in V$ となり，次の法則が成り立つこと.

②-a　スカラの 1 と $\boldsymbol{x} \in V$ について $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

②-b　スカラ α, β と $\boldsymbol{x} \in V$ について $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$

②-c　$(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$　（スカラに関する分配則）

②-d　$\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$　（ベクトルに関する分配則）

14.2　ベクトル空間と線形変換

内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2} = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

距離

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle^{1/2} = \{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^{\boldsymbol{T}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$$ ユークリッド距離

14.2　ベクトル空間と線形変換

特に，$n = 2, n = 3$ のときには x と y のなす角を θ とおくと

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta$$

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$　の場合

$\theta = \pi/2$であり，二つのベクトルは直行していることを意味する．

$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ ともかく．

14.3　静的最適化とラグランジェの未定乗数法

問題

制約条件 $g(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ

$g(x,y)=0$ は xy平面上の曲線で表される.

関数 $f(x,y)$ が極値を取る点では，その点を通る
$f(x,y)$の等高線がその曲線に接している.

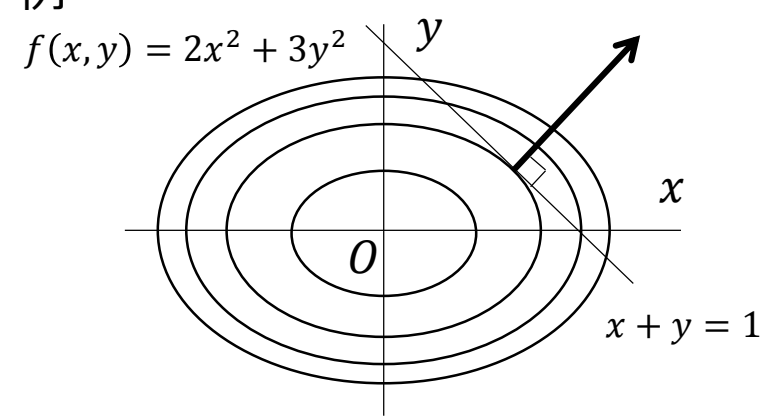
曲線$g(x,y)=0$が極値を取る点では
その点を通る$f(x,y)$の等高線が
その曲線に接している.

曲線$g(x,y)=0$と$f(x,y)$の等高線の
法線ベクトルがその点で平行.

$f(x,y)$の等高線の法線ベクトル∇f

曲線$g(x,y)=0$の法線ベクトル∇g

例



$x+y=1$の制約条件のもとで
関数$f(x,y)=2x^2+3y^2$を最小にする
(x,y)を求めよ.

14.3　静的最適化とラグランジェの未定乗数法

問題

制約条件 $g(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ

$f(x,y)$の等高線の法線ベクトル∇f

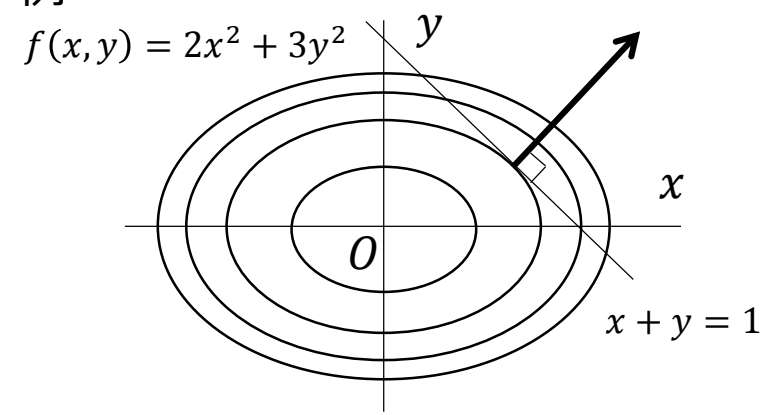
曲線$g(x,y)=0$の法線ベクトル∇g

これらが平行ということは
ある定数（ラグランジュ乗数）
λが存在して

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

となること.
これと$g(x,y)=0$をあわせると
解が求まる.

例



$x+y=1$の制約条件のもとで
関数$f(x,y)=2x^2+3y^2$を最小にする
(x,y)を求めよ.

14.3　静的最適化とラグランジェの未定乗数法

定理　制約条件 $g(x_1,\cdots,x_n)=0$ のもとで関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が極値をとる点は

$$F(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,\cdots,x_n)-\lambda g(x_1,\cdots,x_n)$$

とおくと，次の式を満たす．

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,\cdots,n \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

式(1)をx_iで偏微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

となる．これが $i=1,\cdots,n$ で 0 になるということは

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

を意味する．また，

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=-g(x_1,\cdots,x_n)$$

であるから，これが0となるということは制約条件$g(x_1,\cdots,x_n)=0$ にほかならない．

14.3　静的最適化とラグランジェの未定乗数法

例題　周長が一定である長方形のうち，面積が最大のものは正方形であることを示せ．

長方形の隣り合う辺の長さをx, yとし，全周をLとすると，問題は制約条件，

$$2(x+y)=L$$

のもとで次の関数を最大にすることである．

$$f(x,y)=xy$$

この面積の最大値は存在する．ラグランジュ乗数を導入して，

$$F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x+2y-L)$$

とおく．

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

から次式が得られる．

$$y=2\lambda \qquad x=2\lambda \qquad 2x+2y=L$$

したがって，$x=y$ である．