線形時不変システム

LTS : linear time-invariant system

2.1 重ね合わせの理と線形システム

重ね合わせの理　principle of super-position

入力$x_1(t)$に対するシステムの出力を$y_1(t)$，入力$x_2(t)$に対するシステムの出力を$y_2(t)$とする．このとき，重ね合わせの理とは，次の二つの条件が成り立つことをいう．

- 入力$\{x_1(t)+x_2(t)\}$に対する出力は$\{y_1(t)+y_2(t)\}$である．
- αを定数とするとき，入力$\alpha x_1(t)$に対する出力は$\alpha y_1(t)$である．

線形システム　linear system

重ね合わせの理を満たすシステム

非線形システム　non-linear system

重ね合わせの理を満たさないシステム

2.1 重ね合わせの理と線形システム

例えば

$y(t) = 2x(t)$の場合

$$y(t) = 2\{x_1(t) + x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t)$$

$y(t) = x^2(t)$の場合

$$y(t) = \{x_1(t) + x_2(t)\}^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t)$$
$$\neq y_1(t) + y_2(t)$$

- ✓ 線形とは，入出力が1次関数（直線）で関係づけられる.
- ✓ 線形システムは非線形システムの特殊な場合である.

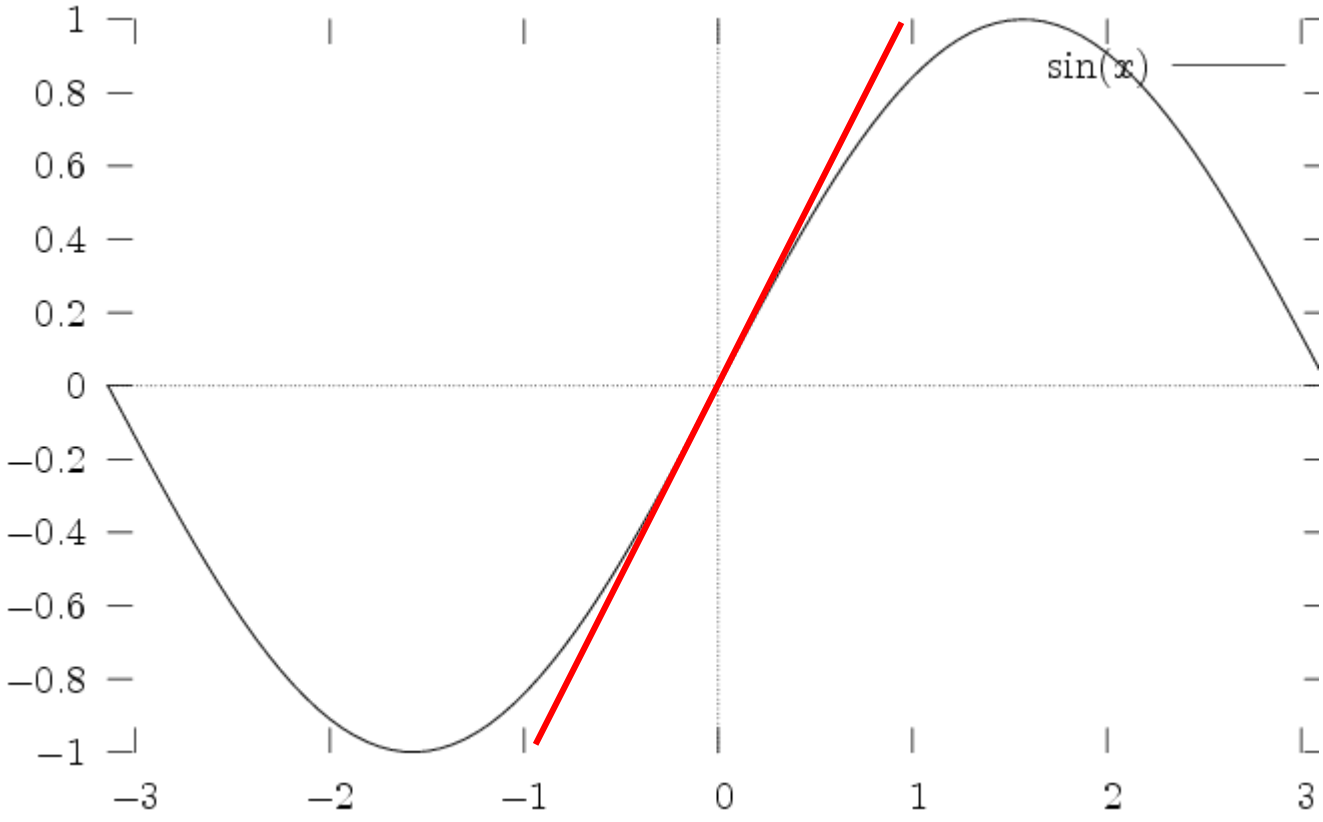
2.1 重ね合わせの理と線形システム

$\sin x$ を$x = 0$近傍でテイラー展開すると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$x = 0$近傍では

$$\sin x \cong x$$



2.2 単位インパルス信号による連続時間信号の表現

連続時間信$x(t)$を階段状の信号$\hat{x}(t)$を用いて近似すると

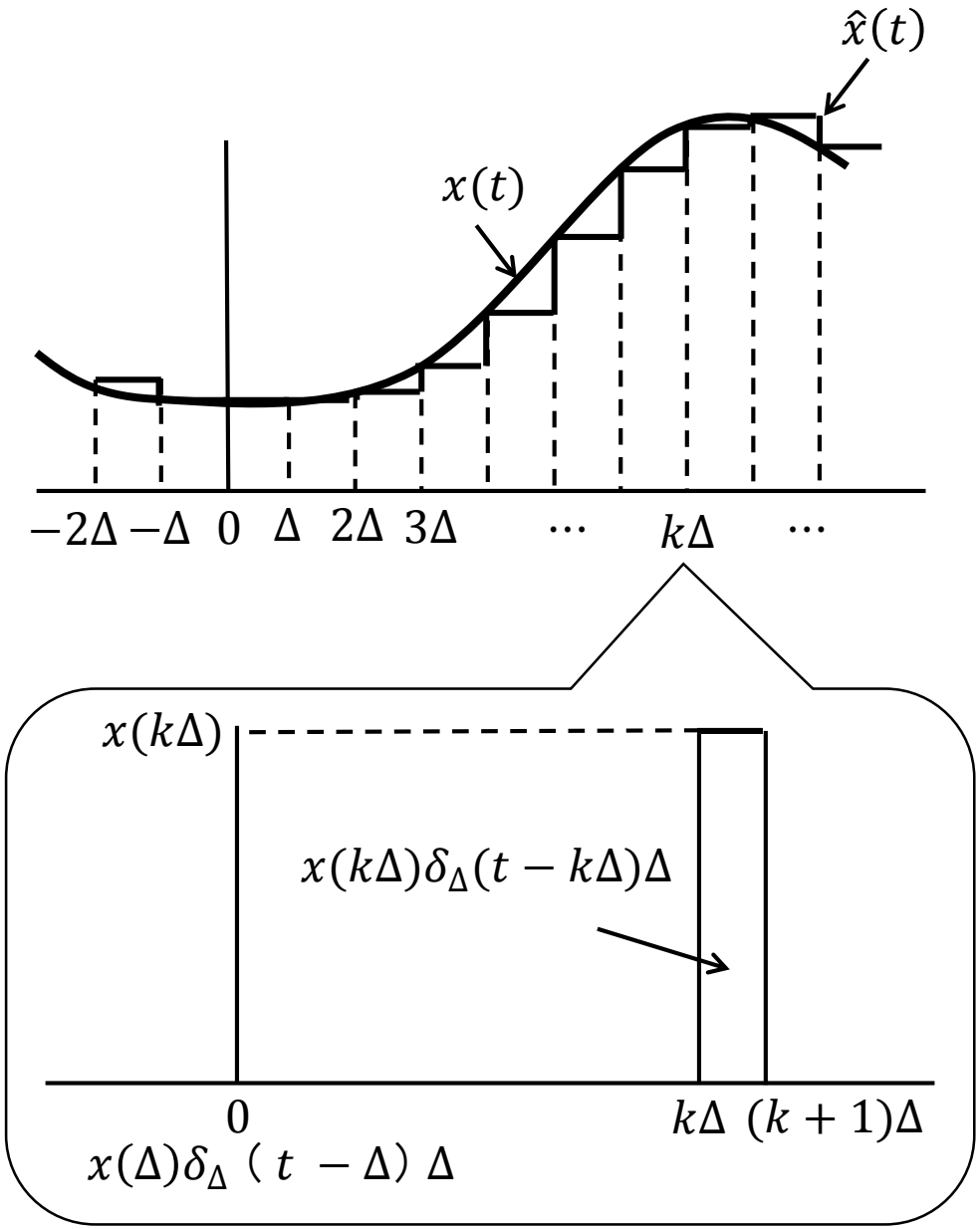
$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$\Delta \to 0$の極限を考えると

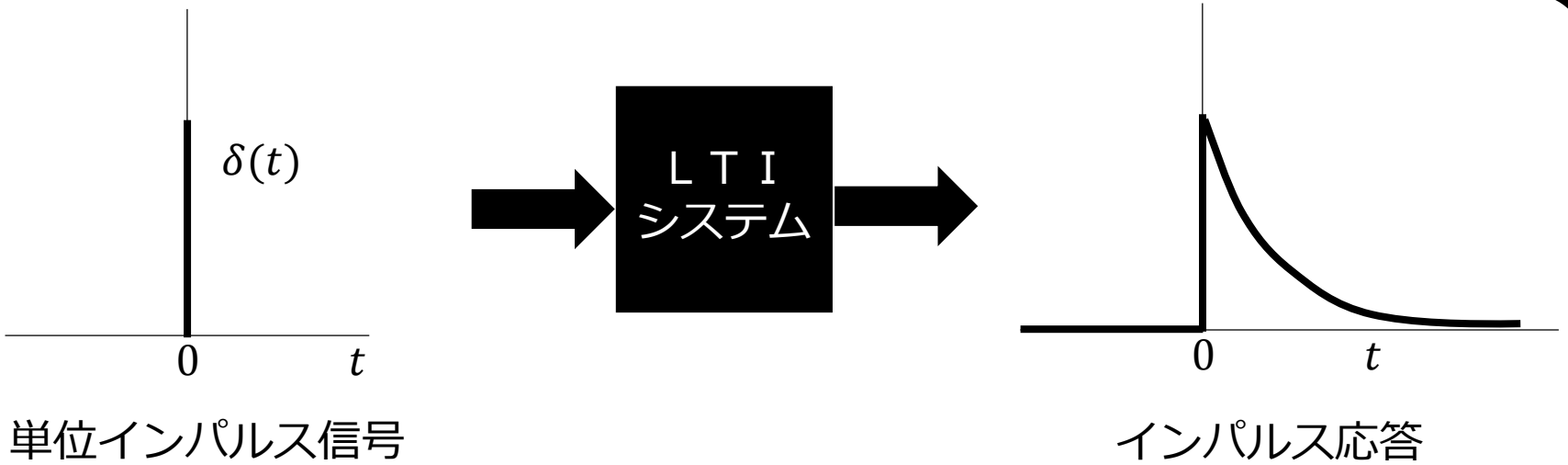
$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

積分を利用して表現すると

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$



2.3 インパルス応答によるLTIシステムの記述



LTIシステムに単位インパルス信号$\delta(t)$を入力した時の出力をインパルス応答（impulse response）という.

LTIシステムのインパルス応答が既知であれば
任意の入力信号に対する出力信号を計算可能

2.3 インパルス応答によるLTIシステムの記述

連続時間信号$x(t)$をLTIシステムに入力した時の出力$y(t)$を求める問題を考える

① $x(t)$を階段状の信号$\hat{x}(t)$で近似する.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

② $\hat{x}(t)$を矩形状の信号に分割し，それぞれを別々にLTIシステムに入力した時の出力を求める.

$$\underset{\text{入力}}{\delta_\Delta(t-k\Delta)} \Rightarrow \underset{\text{出力}}{\hat{g}_\Delta(t-k\Delta)}$$

2.3 インパルス応答によるLTIシステムの記述

連続時間信号$x(t)$をLTIシステムに入力した時の出力$y(t)$を求める問題を考える

③　それぞれの出力を足し合わせると,
入力$\hat{x}(t)$に対する出力$\hat{y}(t)$が表現できる.

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{g}_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

④　$\Delta \to 0$の極限を考えると

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{g}_\Delta(t-k\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

ただし　$g(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{g}_\Delta(t)$　とおいた

2.3 インパルス応答によるLTIシステムの記述

たたみ込み積分（convolution integral）

LTIシステムでは，入力信号$x(t)$に対する出力信号$y(t)$は

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau \qquad y(t) = x(t) * g(t)$$

インパルス応答

LTIシステムはそのインパルス応答によって完全に特徴づけられる.

インパルス応答$g(t)$とステップ応答$f(t)$の関係

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad g(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

インパルス応答$g(t)$とステップ応答$f(t)$は微分・積分の関係で結ばれている.

LTIシステムをステップ応答によっても完全に特徴づけることができる.

2.4 たたみ込み積分の計算法

例題 2.1

インパルス応答が

$$g(t) = u_s(t)$$

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

であるLTIシステムに$x(t) = e^{-at}(t)$を入力する.

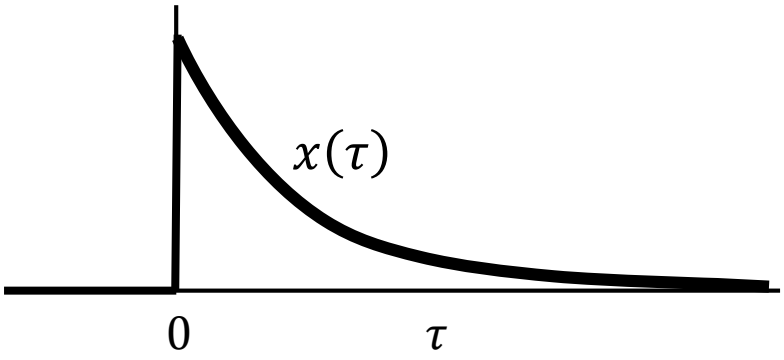
（１）　時間軸をτとして$x(\tau)$と$g(\tau - t)$を図示せよ.

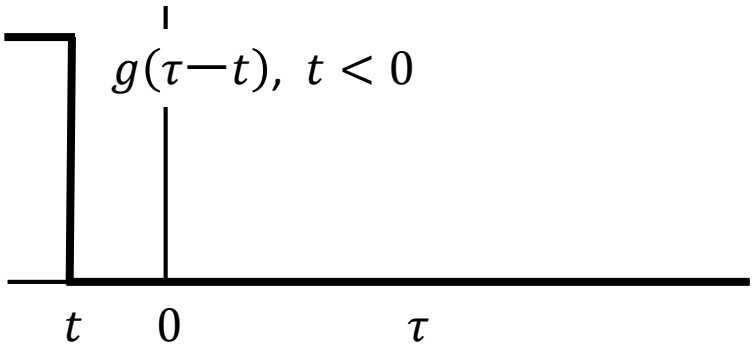
（２）　システムの出力$y(t)$をたたみ込み積分を用いて計算せよ.

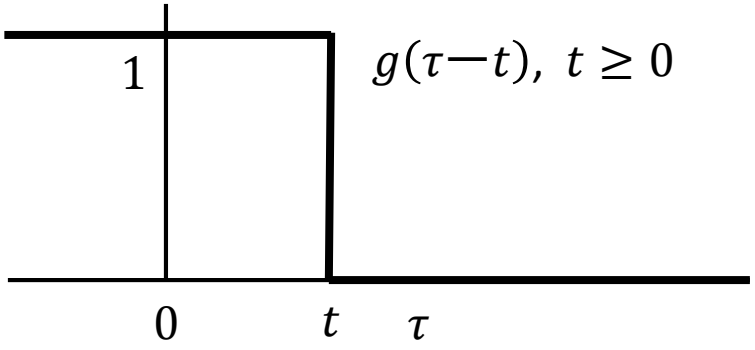
（３）　$y(t)$を図示せよ.

2.4 たたみ込み積分の計算法

（１）　時間軸をτとして$x(\tau)$と$g(\tau-t)$を図示せよ.







2.4 たたみ込み積分の計算法

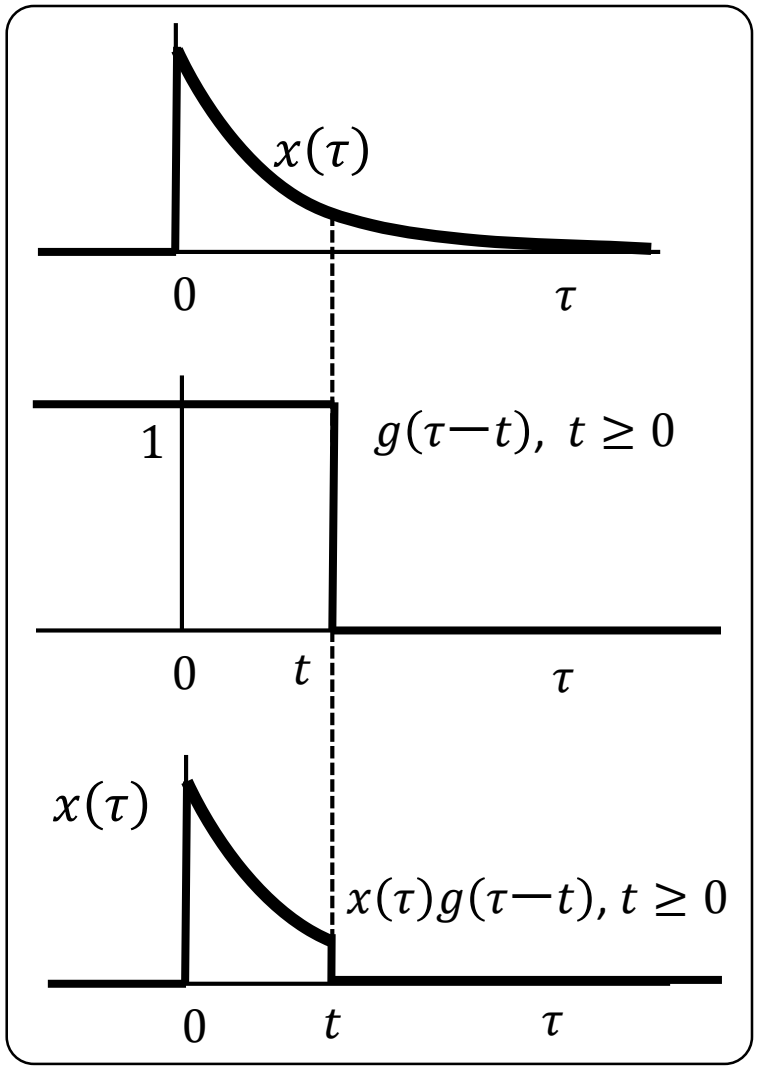
（２）　システムの出力$y(t)$をたたみ込み積分を用いて計算せよ.

$$x(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & \text{if } 0 < \tau < t \\ 0 & \text{otherwith} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} e^{-a\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[-\frac{1}{a}e^{-a\tau}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{a}(1-e^{-at}), t \geq 0$$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u_s(t)$$



2.5 たたみ込み積分の性質

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\xi = t - \tau}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi = g(t) * x(t)$$

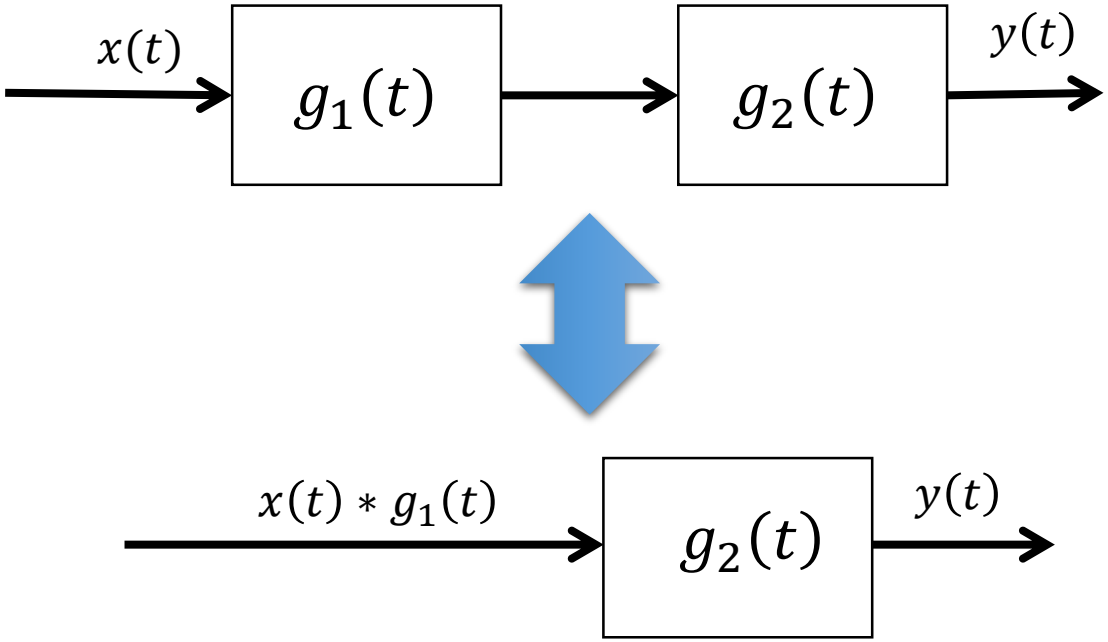
交換則

$$x(t) * g(t) = g(t) * x(t)$$

2.5 たたみ込み積分の性質

結合則

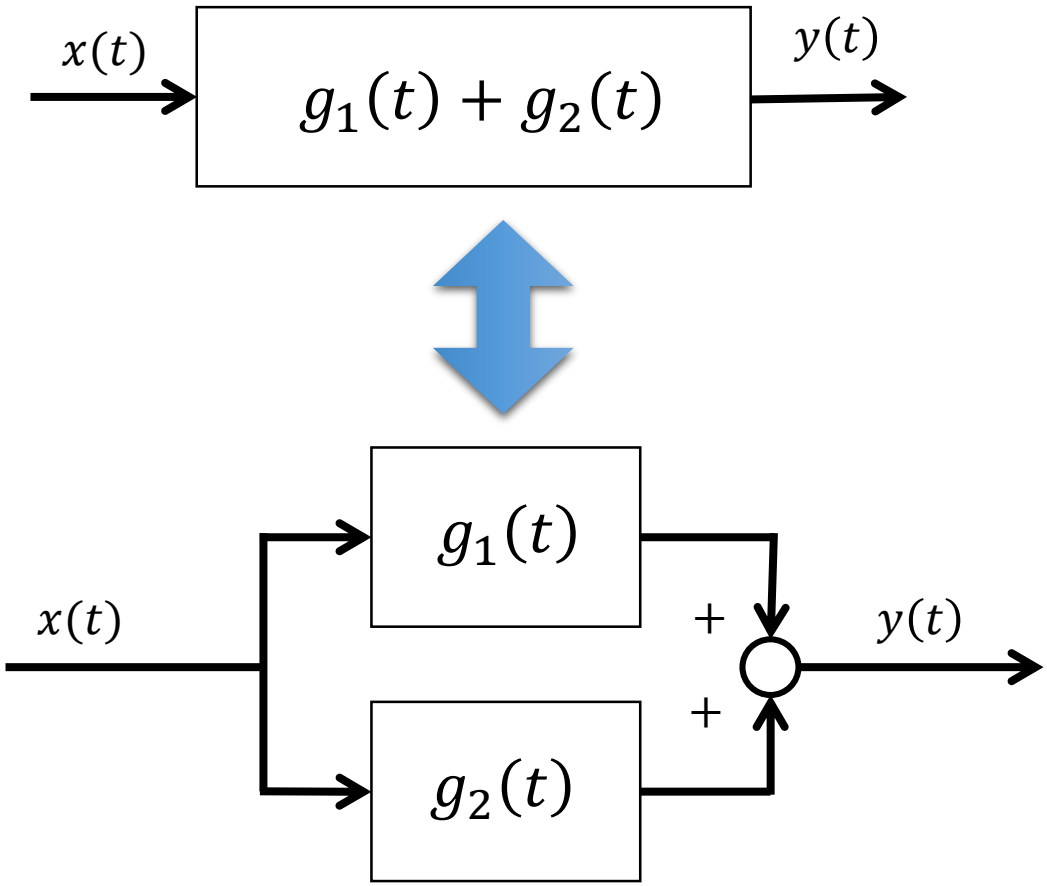
$$x(t) * \{g_1(t) * g_2(t)\} = \{x(t) * g_1(t)\} * g_2(t)$$



2.5 たたみ込み積分の性質

分配則

$$x(t) * \{g_1(t) + g_2(t)\} = x(t) * g_1(t) + x(t) * g_2(t)$$



2.6 LTIシステムの性質

2.6 (1) 動的システムと静的システム

LTIシステムの入出力関係が

$$y(t) = Kx(t) \quad K\text{は定数}$$

で記述されるとき，このLTIシステムを**静的システム**（static system）と呼ぶ.

インパルス応答は

$$g(t) = K\delta(t)$$

LTIシステムが静的システムである条件

$$g(t) = \begin{cases} K, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$K = 1$の場合，**恒等システム**（identity system）と呼ぶ

2.6 LTIシステムの性質

2.6 (1) 動的システムと静的システム

$$g(t) = \begin{cases} K, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

この条件を満たさず時間関数としてインパルス応答が与えられる場合,
そのLTIシステムを**動的システム**（dynamic system）とよぶ.

インパルス応答が

因果信号（causal signal）
負の時間で値０を取る信号

$$g(t) = 0, \qquad t < 0$$

を満たすとき，LTIシステムは因果システムになる．
このとき、たたみこみ積分による入出力関係は,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

任意の有界な入力信号をシステムに加えた時に,
出力も有界になるとき「**システムは安定である**」という.

LTIシステムが有界であるための条件

有界な入力（bounded input）

すべてのtと有限なbに対して以下を満たす入力信号をいう.

$$|x(t)| < b$$

2.6 LTIシステムの性質

2.6 (3) 安定性

$|x(t)| < b$を　$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$　に代入すると,

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)||x(t-\tau)|\mathrm{d}\tau$$

$$\leqq b\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

LTIシステムが安定，すなわち$y(t)$が有界になるための必要十分条件は

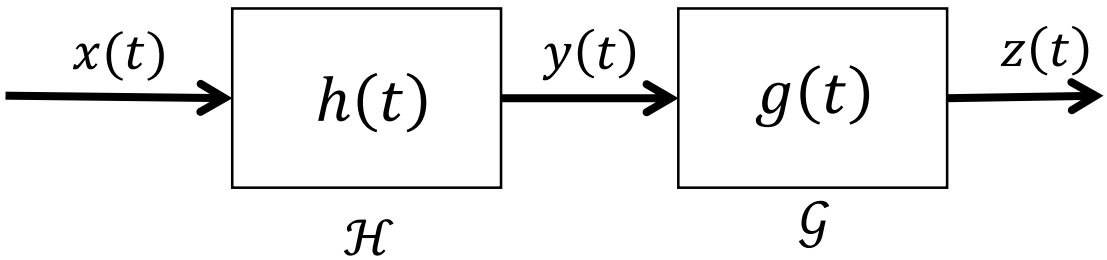
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|\mathrm{d}\tau < \infty$$

絶対可積分（absolutely integrable）の条件と呼ばれる.

2.6 LTIシステムの性質

2.6 (4) 可逆性

インパルス応答が$h(t)$であるLTIシステム$\mathcal{H}$に，インパルス応答が$g(t)$であるLITシステム$\mathcal{G}$を直列接続した場合を考える．



システム$\mathcal{G}$の出力$z(t)$がシステム$\mathcal{H}$の入力$x(t)$に等しくなるとき

システム$\mathcal{H}$は**可逆**（invertible）といい，

$\mathcal{G}$は$\mathcal{H}$の**逆システム**（inverse system）であるという．

$z(t) = x(t)$であるためには，直列接続されたシステムが恒等システムであればよい．

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$