ラプラス変換

Laplace transform

3.1 ラプラス変換と逆ラプラス変換

ラプラス変換

因果信号$x(t)$の**ラプラス変換**（Laplace transform）は

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{dt}$$

ただし，$\mathcal{L}[\cdot]$はラプラス変換を表し，$s(=\sigma + j\omega)$は複素数である．

- 因果信号：　$x(t) = 0, \qquad t < 0$
- これは片側ラプラス変換と呼ばれることもある．
- 時間関数は小文字で表し，ラプラス変換された関数は大文字で表す．
- $e^{t^2}, \tan \omega t$のような関数のラプラス変換は存在しない．
- $s(=\sigma + j\omega)$により定義される複素平面をs平面（s plane）と呼ぶ．
- 「時間領域からs領域（s domain）への変換」という．

3.1 ラプラス変換と逆ラプラス変換

ラプラス変換

因果信号$x(t)$の**ラプラス変換**（Laplace transform）は

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{dt}$$

ただし，$\mathcal{L}[\cdot]$はラプラス変換を表し，$s(=\sigma + j\omega)$は複素数である．

- ラプラス変換が存在するためには右辺の積分が収束する必要がある．
  そのためには以下を満たすMとαが存在する必要がある．

$$|x(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

この条件は，tの増加に伴い$x(t)$がある指数関数$e^{\alpha t}$よりも増大しないことを意味する．
これを$x(t)$が指数オーダの関数であるという．

3.1 ラプラス変換と逆ラプラス変換

逆ラプラス変換

$X(t)$の**逆ラプラス変換**（inverse Laplace transform）は

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}\mathrm{d}s, \quad t > 0$$

ただし，cは実定数.

- この定義を用いて逆ラプラス変換を計算することはほとんどない.
  通常，ラプラス変換表を利用して逆変換を計算する.

3.2 基本的な連続時間信号のラプラス変換

（１）単位インパルス信号

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = e^0 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = x(a)$$

（２）単位ステップ信号

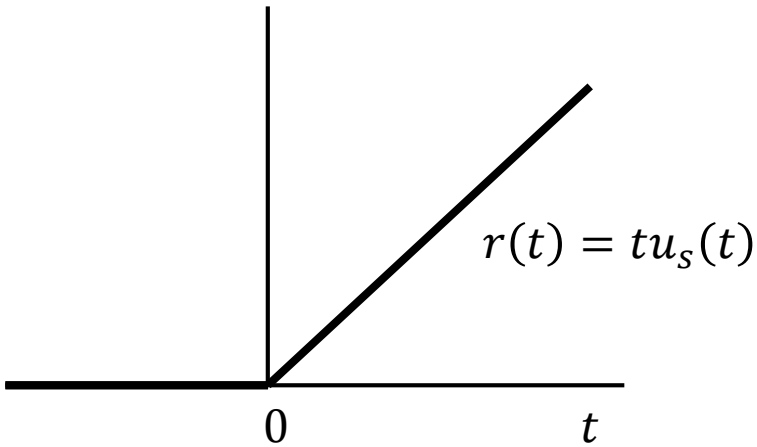
$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \int_0^\infty u_s(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}$$

3.2 基本的な連続時間信号のラプラス変換

（３）単位ランプ信号

$$\mathcal{L}[r(t)] = \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \left[-\frac{te^{-st}}{s}\right] + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2}$$

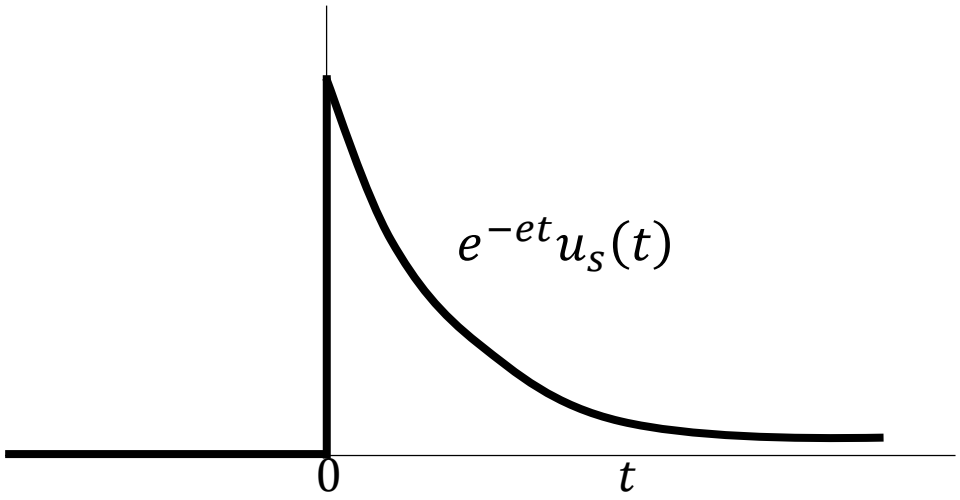
$$r(t) = tu_s(t) = \begin{cases} t, t \geqq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$



3.2 基本的な連続時間信号のラプラス変換

（４）片側指数信号

$$\mathcal{L}[e^{-et}u_s(t)] = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s+a}$$



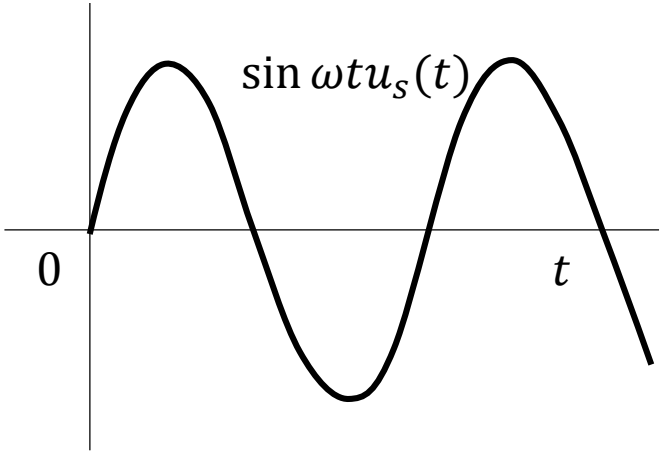
3.2 基本的な連続時間信号のラプラス変換

（５）片側正弦波信号

$$\mathcal{L}[\sin \omega t u_s(t)] = \frac{1}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$



$$\mathcal{L}[\cos \omega t u_s(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

3.2 基本的な連続時間信号のラプラス変換

	信号の名称	$x(t)$	$X(s)$
1	単位インパルス信号	$\delta(t)$	1
2	単位ステップ信号	$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
3	単位ランプ信号	$r(t) = tu_s(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	片側指数信号	$e^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$
5	片側正弦波信号	$\sin \omega t\, u_s(t)$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$
6	片側正弦波信号	$\cos \omega t\, u_s(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

3.2 基本的な連続時間信号のラプラス変換

	信号の名称	$x(t)$	$X(s)$
7	べき乗信号	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u_s(t), n = 1,2,\cdots$	$\frac{1}{s^n}$
8		$te^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9		$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
10	減衰正弦波信号	$e^{-at}\cos\omega t\, u_s(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	減衰正弦波信号	$e^{-at}\sin\omega t\, u_s(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

3.3 ラプラス変換とフーリエ変換

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ男爵（**Jean Baptiste Joseph Fourier**, Baron de、1768年3月21日 - 1830年5月16日）は、フランスの数学者・物理学者。

信号$x(t)$について $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$ が成り立つ必要がある.

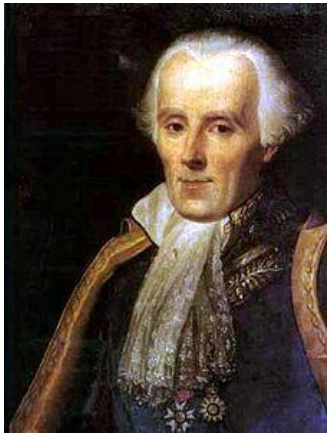
$s = \sigma + j\omega$

変換の存在条件の緩和

ラプラス変換

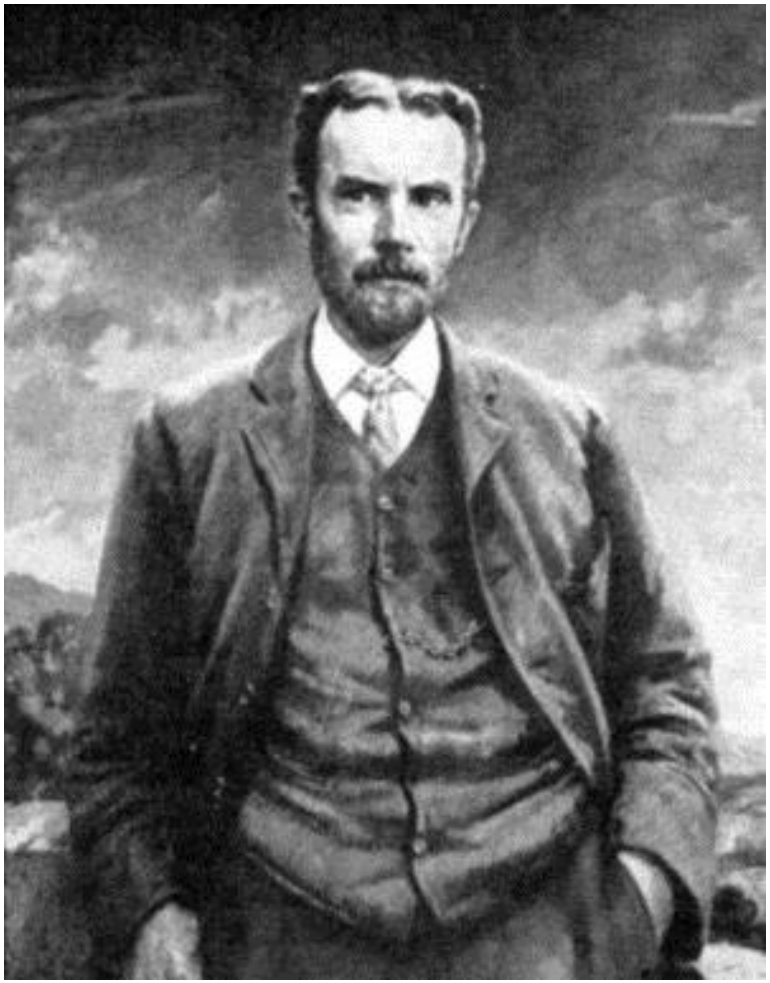
$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

ピエール＝シモン・ラプラス（**Pierre-Simon Laplace**, 1749年3月23日 - 1827年3月5日）は、フランスの自然科学者、数学者、物理学者、天文学者。「天体力学概論」(traité intitulé Mécanique Céleste)と「確率論の解析理論」という名著を残した。



ラプラス変換が存在するためには $|x(t)| \leq Me^{\alpha t}$
を満たすMとαが存在する必要がある.

ラプラス変換の発明者はラプラスじゃない？（ウィキペディアより抜粋）



オリヴァー・ヘヴィサイド

（Oliver Heaviside, 1850年5月18日 - 1925年2月3日）
はイギリスの電気技師、物理学者、数学者である。幼時に猩紅熱に罹患したことにより難聴となった。正規の大学教育を受けず研究機関にも所属せず、独学で研究を行った。電気回路におけるインピーダンスの概念の導入、複素数の導入や「ヘヴィサイドの演算子法」といった物理数学の方法を開発するなど、大きな功績を残した。また、インダクタンスやコンダクタンスなど、回路理論用語のいくつかを提唱した。

1899年に電気技師であったオリヴァー・ヘヴィサイドが回路方程式を解くための実用的な演算子を経験則として考案して発表し、後に数学者がその演算子に対し厳密に理論的な裏付けを行った.

理論的な根拠が曖昧なままで発表されたため、この計算手法に対する懐疑的な声も多かった。この「ヘヴィサイドの演算子」の発表の後に、多くの数学者達により数学的な基盤は1780年の数学者ピエール＝シモン・ラプラスの著作にある事が指摘された(この著作においてラプラス変換の公式が頻繁に現れていた)。

Why should I refuse a good dinner simply because I don't understand the digestive processes involved?
(消化のプロセスを知らない私は美味しいディナーを断らなければならないのか。)