ラプラス変換の性質

Property of Laplace transform

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.1 線形性

【線形性】

$$\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = a\mathcal{L}[x(t)] + b\mathcal{L}[y(t)]$$

aとbは実定数

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] &= \int_0^\infty (ax(t) + by(t))e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= a\int_0^\infty x(t)e^{-st}\mathrm{d}t + b\int_0^\infty y(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= a\mathcal{L}[x(t)] + b\mathcal{L}[y(t)]\end{aligned}$$

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.2 時間軸推移

【時間軸推移】

$$\mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[x(t)]$$

$$\mathcal{L}[x(t-\tau)] = \int_0^\infty x(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_\tau^\infty x(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$(t^* = t-\tau)$$

$$= \int_0^\infty x(t^*)e^{-s(t^*+\tau)}\mathrm{d}t^* = e^{-\tau s}\int_0^\infty x(t^*)e^{-st^*}\mathrm{d}t^*$$

$$= e^{-\tau s}\mathcal{L}[x(t^*)] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[x(t)]$$

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.3 s 領域推移

【s領域推移】

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = X(s+a)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = \int_0^\infty e^{-at}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty x(t)e^{-(s+a)t}\mathrm{d}t$$

$$= X(s+a)$$

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.4 時間軸スケーリング

【時間軸スケーリング】

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}[x(at)] = \int_0^\infty x(at) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$(t^* = at)$

$$= \int_0^\infty x(t^*) e^{-s\frac{t^*}{a}} \mathrm{d}\frac{t^*}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty x(t^*) e^{-\frac{s}{a}t^*} \mathrm{d}\, t^*$$

$$= \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.5 時間微分

【時間微分】

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right] &= \left[x(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= sX(s) - x(0)\end{aligned}$$

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.6 時間積分

【時間積分】

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}X(s)$$

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \left[x(t)\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right]\frac{e^{-st}}{-s}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x(0)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.7 s領域での微分

【s領域での微分】

$$\mathcal{L}[-tx(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s)$$

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad \rightleftharpoons \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\rightleftharpoons \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\rightleftharpoons \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) = \int_0^\infty -tx(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\rightleftharpoons \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) = \mathcal{L}[-tx(t)]$$

4.1 ラプラス変換の性質

4.1.8 たたみ込み積分

【たたみ込み積分】

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \mathcal{L}[x(t)]\mathcal{L}[y(t)]$$

$$X(s) \equiv \int_0^\infty x(u)e^{-su}\mathrm{d}u \quad Y(s) \equiv \int_0^\infty y(v)e^{-sv}\mathrm{d}v$$

$$X(s)Y(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(u)y(v)e^{-s(u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \tau \\ u + v = t \end{array}} \leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 \le u \le \infty \\ 0 \le v \le \infty \end{array}} \leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 \le \tau \le \infty \\ 0 \le t - \tau \le \infty \end{array}} \leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 \le t \le \tau \\ 0 \le \tau \le \infty \end{array}}$$

$$X(s)Y(s) = \int_0^\infty \left\{\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}e^{-st}\mathrm{d}t$$

4.2 ラプラス変換の性質

4.1.9 最終値の定理

【最終値の定理　final value theorem】

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

時間信号$x(t)$の$t \to \infty$における定常値が
$sX(s)$の$s \to 0$における関連していることを示す。

例）　$X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$

$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

○ ⇒ $\lim_{s\to 0} sX(s) = 0$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

- $x(t)$は$t > 0$で微分可能であり，$\dot{x}(t)$のラプラス変換が$s \to 0$で存在しなければならない。
- $sX(s)$の分母の根の実部が負である場合に限られる.

例）　$X(s) = \dfrac{1}{(s-1)s} = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s}$

$x(t) = e^{t} - 1$

× ⇒ $\lim_{s\to 0} sX(s) = -1$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$

4.2 ラプラス変換の性質

4.1.9 最終値の定理

【初期値の定理　initial value theorem】

$$x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

- 最終値の定理と対を為す定理。
- $x(t)$と$\dot{x}(t)$がともにラプラス変換可能でなければなり立たない.

例）　$x(t) = \cos\omega t$

$$X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \Rightarrow \quad x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^2+\omega^2} = 1$$

ちなみに、この関数には最終値は無い.