逆ラプラス変換

Inverse Laplace transform

5.1 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算

$X(s)$をsの有理関数とする.

$$X(s) = K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}, \qquad n > m$$

$\{p_i\}$と$\{z_i\}$は実数または複素数.

有理関数$X(s)$に対して（**分母多項式**）$= 0$の根を極（pole）といい,
（**分子多項式**）$= 0$の根を零点（zero）という.

$\{p_i\}$がすべて異なるとき,
以下のように部分分数展開（partial fraction expansion）できる.

$$X(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

$\{a_i\}$は$-p_i$における**留数**（residue）

5.1 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算

部分分数展開

$$X(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

留数の計算　$a_i = \lim_{s \to -p_i} (s+p_i)X(s)$

留数計算

$$X(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

逆ラプラス変換

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= (a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}) u_s(t)$$

5.1 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算

例題)　$X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ に対して $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ を求める.

部分分数展開

$$X(s) = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

留数計算

$$a_1 = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\Bigg|_{s=-1} = 1$$

$$a_2 = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1}\Bigg|_{s=-2} = -1$$

逆ラプラス変換

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = (e^{-t} - e^{-2t})u_s(t)$$

例題　重極がある場合）

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$ に対して $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ を求める.

部分分数展開

$$X(s) = \frac{a}{s+1} + \frac{b_1}{(s+2)^2} + \frac{b_2}{s+2}$$

留数計算

$$a = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{(s+2)^2}\Bigg|_{s=-1} = 2$$

5.1 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算

留数計算

$$b_1 = (s+2)^2 X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1}\Bigg|_{s=-2} = -1$$

$$b_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s+2)^2 X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s+3}{s+1}\right)\Bigg|_{s=-2}$$

$$= \frac{-2}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=-2} = -2$$

逆ラプラス変換

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}\right]$$

$$= (2e^{-t} - te^{-2t} - 2e^{-2t})u_s(t)$$

5.1 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算

ヘビサイドの部分分数展開定理

$$X(s) = \frac{q(s)}{(s-p_1)^l (s-p_{l+1}) \cdots (s-p_m)}$$

$$X(s) = \frac{a_{1,l}}{(s-p_1)^l} + \frac{a_{1,l-1}}{(s-p_1)^{l-1}} + \cdots + \frac{a_{1,1}}{(s-p_1)} + \frac{a_{l+1}}{(s-p_{l+1})} + \cdots + \frac{a_m}{(s-p_m)}$$

留数の計算

$$a_{1,l} = \left[(s-p_1)^l X(s)\right]_{s=p_1}$$

$$a_{1,l-1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-p_1)^l X(s)\right]_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$a_{1,l-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}(s-p_1)^l X(s)\right]_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$a_{1,1} = \frac{1}{(l-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}s^{l-1}}(s-p_1)^l X(s)\right]_{s=p_1}$$

5.1 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算

例題）　$X(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+1)^3}$ に対して $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ を求める.

部分分数展開

$$X(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+2} + \frac{b_1}{s+1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3}$$

留数計算

$$a_1 = sX(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$b_3 = (s+1)^3X(s)\Big|_{s=-1} = -1$$

$$b_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s+1)^3X(s)\Big|_{s=-1} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(s+1)^3X(s)\Big|_{s=-1} = 2b_1$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(s+1)^3X(s)\Big|_{s=-1} = -1$$

5.1 部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算

部分分数展開

$$X(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

逆ラプラス変換

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t}\right) u_s(t)$$

5.2 ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+4x(t)=0,\qquad t\geqq 0\qquad x(0)=0\qquad x^{(1)}(0)=1$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]=s^2X(s)-sx(0)-x^{(1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^nx(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)$$

ラプラス変換
$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$

$$\left[s^2X(s)-sx(0)-x^{(1)}(0)\right]+5\left[sX(s)-x(0)\right]+4X(s)=0$$

初期値代入

$$\left(s^2+5s+4\right)X(s)=1$$

$$X(s)=\frac{1}{s^2+5s+4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+4}\right)$$

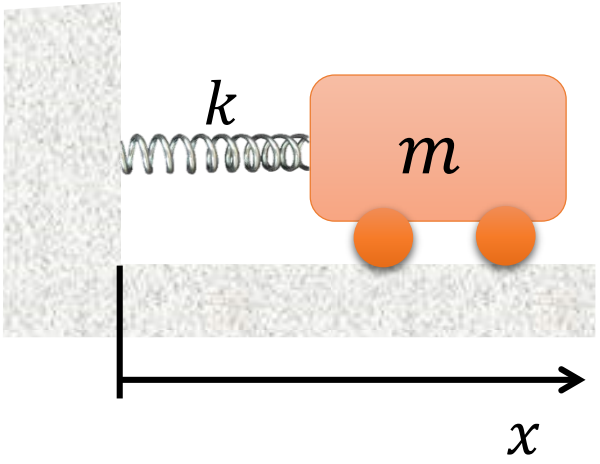
逆ラプラス変換

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-4t})u_s(t)$$

5.2 ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -kx(t)$$

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = 0$$



$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_n^2 x(t) = 0$$

$\omega_n = \sqrt{k/m}$　固有角周波数

ラプラス変換
$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}x_0$$

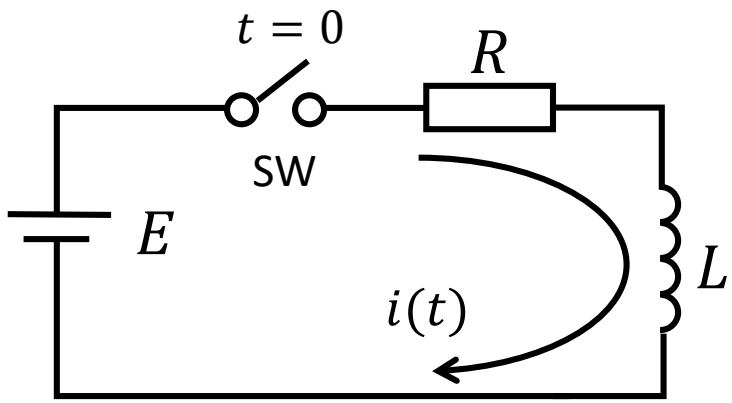
逆ラプラス変換

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x_0 \cos \omega_n t$$

5.2 ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = E, \qquad t > 0$$

$$i(0) = 0$$



ラプラス変換
$\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$

$$(Ls + R)I(s) = \frac{E}{s}$$

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls+R)} = \frac{E}{L}\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)} = \frac{E}{L}\left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+\frac{R}{L}}\right]$$

留数計算

$$a_1 = L/R \quad a_2 = -L/R$$

逆ラプラス変換

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad t \geq 0$$