信号のノルム

Norm of signals

6.1 ノルム

ユークリッド距離　Euclidean distance

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ユークリッドノルム　Euclidean norm

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{Euclid}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

ノルム　Vをベクトル空間とし，Vから正の実数値への写像をϕとする．
このとき，次の三つの条件を満たすならϕはV上のノルムと呼ばれる．

（１）非不性　$\phi(v) \geqq 0, \quad v \in V$

（２）同次性　$\phi(av) = |a|\phi(v)$

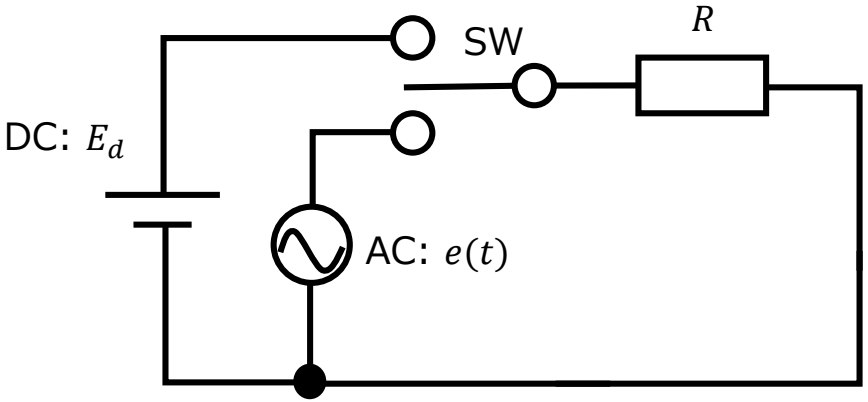
（３）三角不等式　$\phi(v + \omega) \leqq \phi(v) + \phi(\omega), \quad v, \omega \in V$

6.2 持続的な信号の大きさ

例）電気回路の交流電圧の大きさ

交流電圧　$e(t) = E_m \sin(2\pi f t + \phi)$

E_m：最大振幅　ϕ：位相



直流電流の場合に抵抗で消費される電力

$$P_d = \frac{E_d^2}{R}$$

交流電流の場合に抵抗で消費される電力

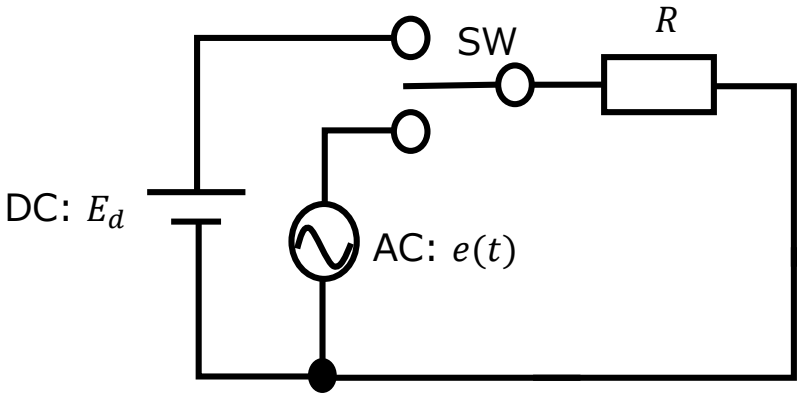
瞬時値　$p = \dfrac{e^2}{R}$

1周期の平均値　$P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \frac{e^2}{R}\,\mathrm{d}t$

6.2 持続的な信号の大きさ

交流電圧$e(t)$によって抵抗Rで消費される電力と等しくなるような直流電圧の大きさを，交流電圧の大きさEとする．

$$\frac{E^2}{R} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^2}{R}\,\mathrm{d}t$$



交流電圧の大きさ

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

E：実効値（efficient value）

6.2 持続的な信号の大きさ

交流電源の実効値を計算してみよう

$$e(t) = E_m \sin 2\pi f t \qquad \theta = 2\pi f t$$

$$E = \mathrm{rms} = \sqrt{\frac{E_m^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta} = E_m\sqrt{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta}$$

$$= E_m\sqrt{\frac{1}{4\pi}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_m \approx 0.707E_m$$

家庭用電源100[V]は実効値　　最大振幅は141[V]

6.2 持続的な信号の大きさ

交流電圧の平均値（av）の定義

$$\mathrm{av} = \frac{1}{T}\int_0^T |e(t)|\mathrm{d}t$$

交流電源の平均値を計算してみよう

$$\mathrm{av} = \frac{1}{T}\int_0^T |e(t)|\mathrm{d}t = \frac{Em}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \approx 0.636E_m$$

$$\mathrm{av} \leq \mathrm{rms}$$

6.2 持続的な信号の大きさ

(1)絶対平均値（average-absolute value）：定常状態の平均値

$$\|x\|_{aa} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|\mathrm{d}t$$

(2) rms

平均パワー（average power）　$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t$

極限が存在する場合，$x(t)$はパワー信号（power signal）と呼ばれる.

$x(t)$のrmsは

$$\|x\|_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t}$$

6.3 信号のノルム

$\mathcal{L}_1$ノルム　$\|x\|_1 = \int_0^\infty |x(t)|\,\mathrm{d}t$　1は絶対値を意味する.

$\mathcal{L}_2$ノルム　$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |x(t)|^2 \mathrm{d}t}$　ユークリッド距離を意味する.

$\mathcal{L}_\infty$ノルム　$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$　ピークノルムとも呼ばれる.

6.3 信号のノルム

パワーとエネルギー

信号$x(t)$を電流とし，それが$1[\Omega]$の抵抗に流れている電気回路を考える．

$x^2(t)$は時間tにおけるパワー（power）を表し
それを積分したものはエネルギー（energy）になる．

すなわち，物理的には$\mathcal{L}_2$ノルムの２乗$\|x\|_2^2$はエネルギーを表す量に対応する．

supとmax, infとmin

有界： 例えば，集合Xに属するすべての数xがある数aより大きく（小さく）ないとき
すなわち、$x \leq a$（$x \geq a$）のときXは上方（下方）に有界であるといい
aをその一つの上界（下界）という．

sup:（supremum）最小上界　上界のうちでもっとも小さいもの

inf:（infimum）最大下界　下界のうちでもっとも大きいもの

max:（maximum）最大値　集合Xの上界aが$a \in X$のとき，aはXの最大値

min:（minimum）最小値　集合Xの下界aが$a \in X$のとき，aはXの最小値