離散時間信号とシステム

Discrete-time signal and systems

離散時間正弦波信号

$$x(k) = A\cos(\omega_0 k + \phi)$$

A　振幅　ω_0[rad]：角周波数　ϕ[rad]：位相

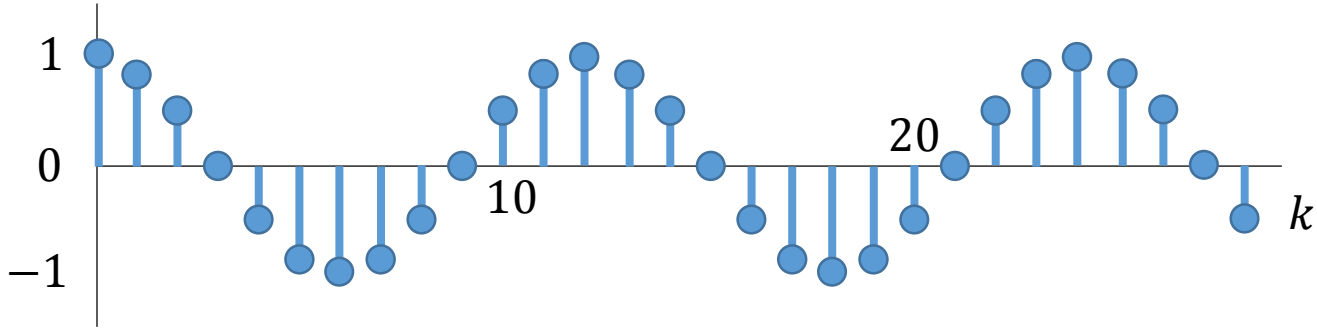
$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

f_0[rad/s]：周波数

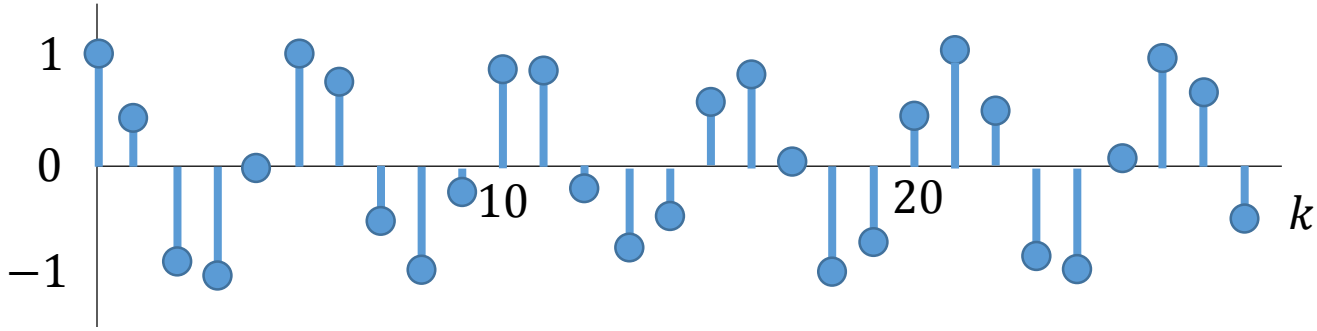
7.1 離散時間信号

7.1.1　正弦波信号

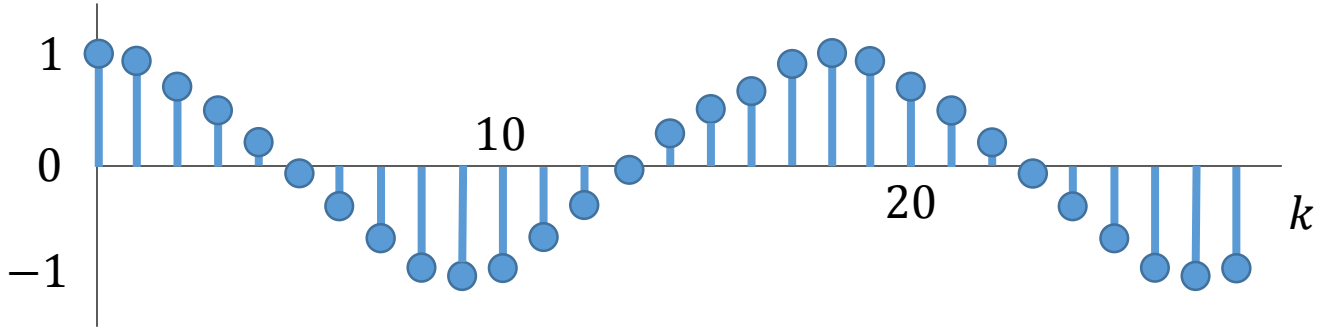
$$x_1(k) = \cos\left(\frac{2\pi}{12}k\right)$$



$$x_2(k) = \cos\left(\frac{8\pi}{21}k\right)$$



$$x_3(k) = \cos\left(\frac{k}{3}\right)$$



周期性（離散時間信号）

すべてのkに対して

$$x(k) = x(k+N)$$

がなり立つような整数Nが存在するとき
離散時間信号$x(k)$は周期Nを持つ周期信号である.

最小の整数N_0を基本周期と呼ぶ.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$ を基本角周波数と呼ぶ.

(1)複素指数信号の波形

離散時間複素指数信号（正弦波信号を一般化したもの）

$$x(k) = C\alpha^k \quad \text{もしくは} \quad x(k) = Ce^{\beta k}$$

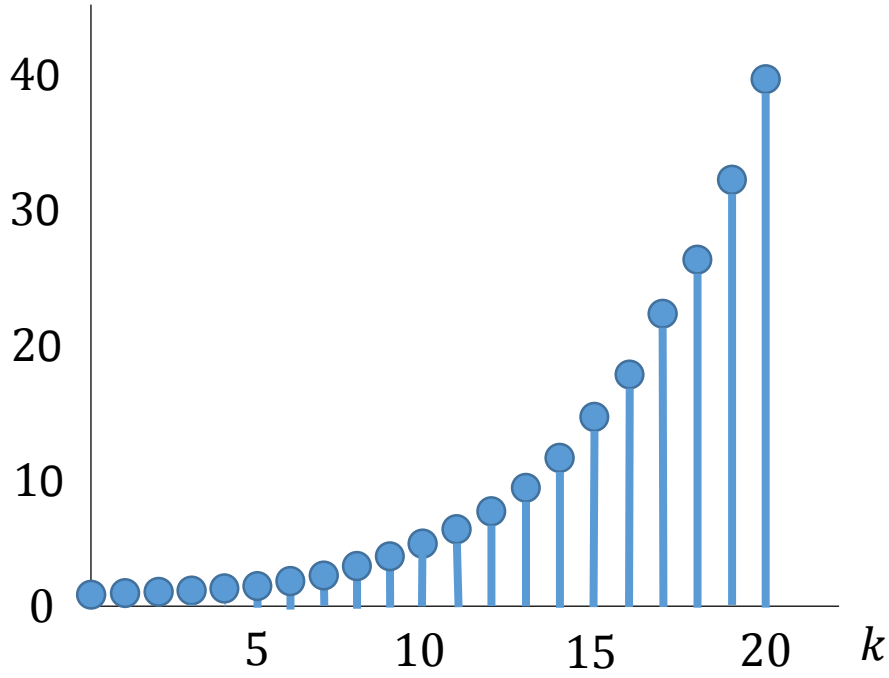
Cとαは複素数

- Cとαがともに実数の場合
- βが純虚数の場合
- Cとαがともに複素数の場合

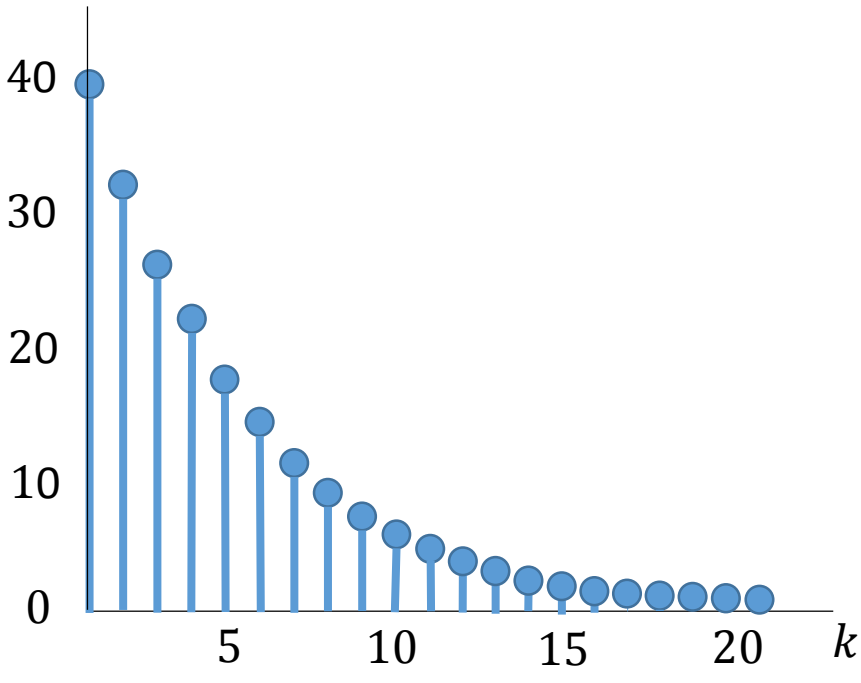
7.1 離散時間信号

7.1.2　複素指数信号

- Cとαがともに実数の場合



(a) $\alpha > 1$　1.2^k

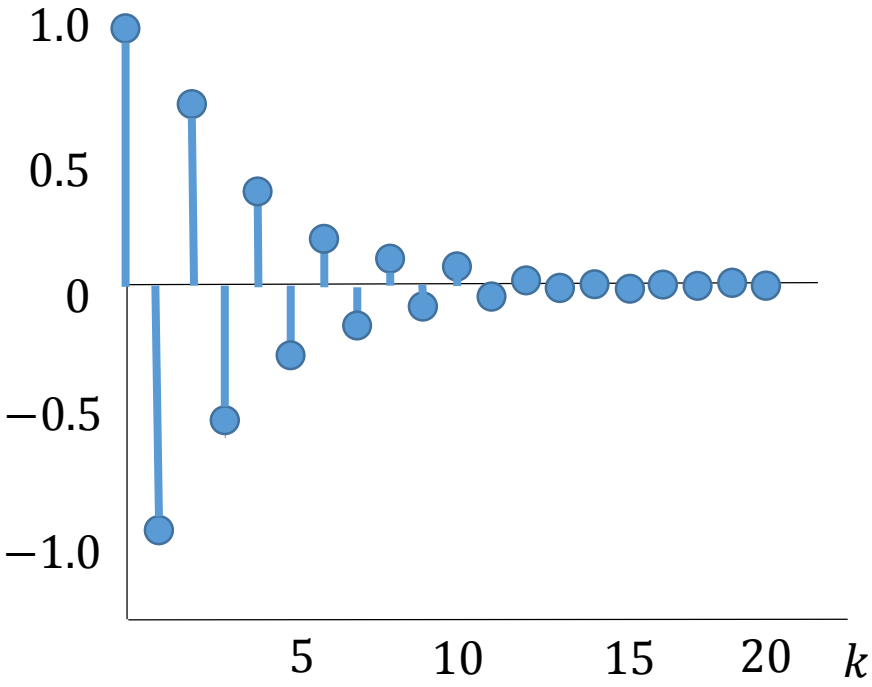


(b) $0 < \alpha < 1$　0.8^k

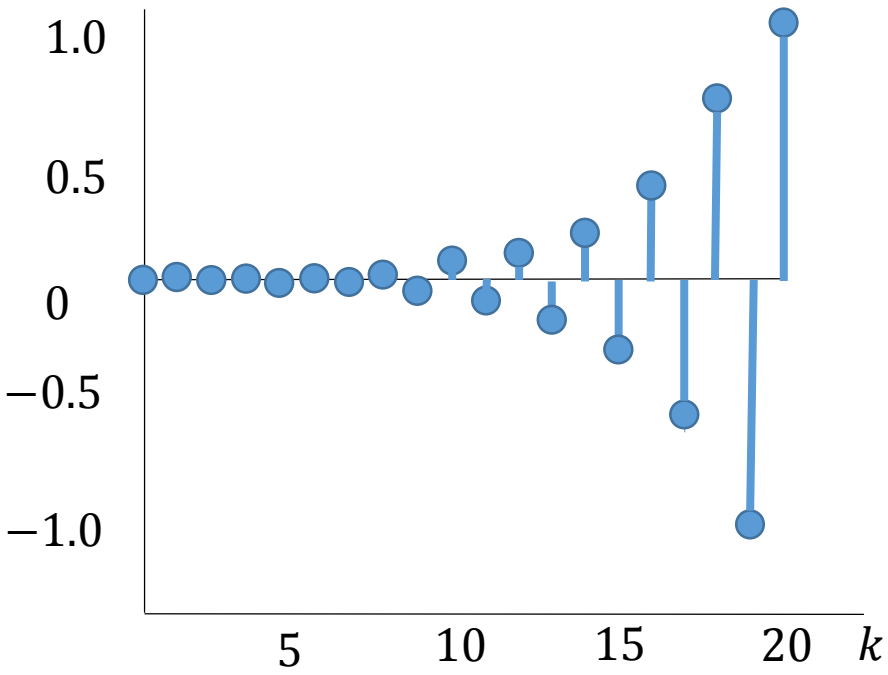
7.1 離散時間信号

7.1.2　複素指数信号

● Cとαがともに実数の場合



(c) $-1 < \alpha < 0$ $(-0.8)^k$



(d) $\alpha < -1(-1.2)^k$

7.1 離散時間信号

7.1.2　複素指数信号

- βが純虚数の場合　$\beta = j\omega_0$

$$x(k) = e^{j\omega_0 k}$$

$$e^{j\omega_0 k} = \cos\omega_0 k + j\sin\omega_0 k$$

基本角周波数ω_0を持つ正弦波信号$\{\cos\omega_0 k, \sin\omega_0 k\}$を用いて記述できる.

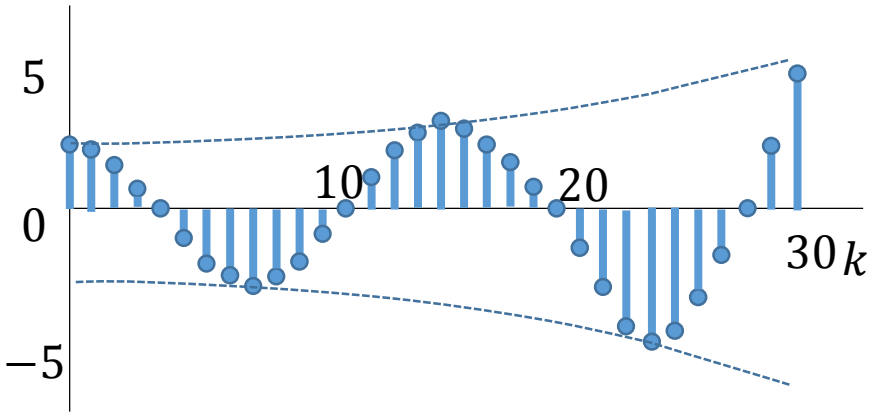
7.1 離散時間信号

7.1.2　複素指数信号

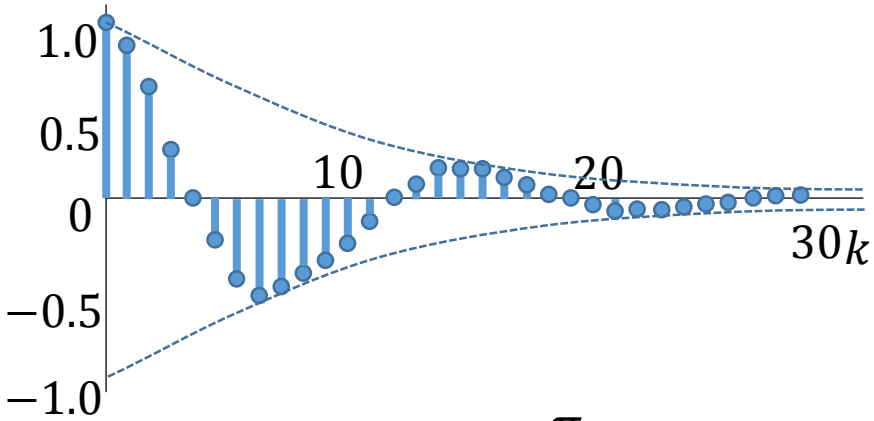
● Cとαがともに複素数の場合

$C = |C|e^{j\theta} \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$

$$
\begin{aligned}
x(k) &= C\alpha^k \\
&= |C||\alpha|^k e^{j(\omega_0 k+\theta)} \\
&= |C||\alpha|^k \cos(\omega_0 k + \theta) + j|C||\alpha|^k \sin(\omega_0 k + \theta)
\end{aligned}
$$



$1.05^k \cos\left(\frac{\pi}{8}k\right)$



$0.9^k \cos\left(\frac{\pi}{8}k\right)$

7.1 離散時間信号

7.1.2　複素指数信号

連続時間複素指数信号　$x(t) = e^{j\omega_0 t}$　の周期性の性質

性質１　ω_0が増加するにつれて，信号$x(t)$の振動数も増加する.

性質２　信号$x(t)$は任意のω_0に対して周期的になる.

離散時間複素指数信号

角周波数が$\omega_0 + 2\pi$ の離散時間複素指数信号

$$e^{j(\omega_0+2\pi)k} = e^{j2\pi k}e^{j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 k}$$

$0 \leq \omega_0 < 2\pi$の区間のみを考えればよい.

7.1 離散時間信号

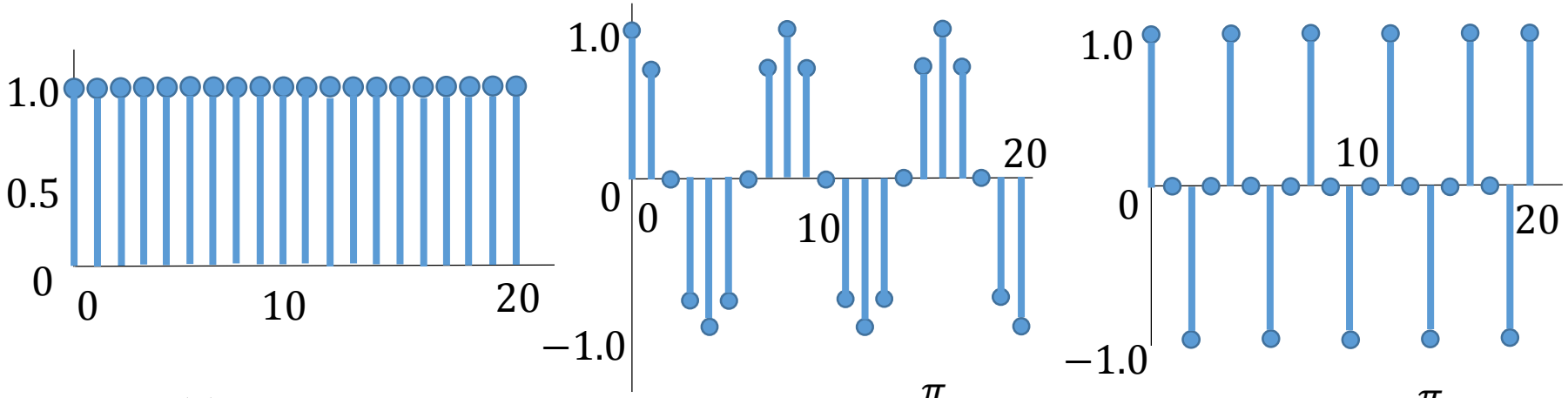
7.1.2　複素指数信号

$0 \leq \omega_0 < 2\pi$においてω_0を増加させても
振動数は単純に増加しない.

$0 \leq \omega_0 < \pi$では振動数は増加

$\pi \leq \omega_0 < 2\pi$では振動数は減少

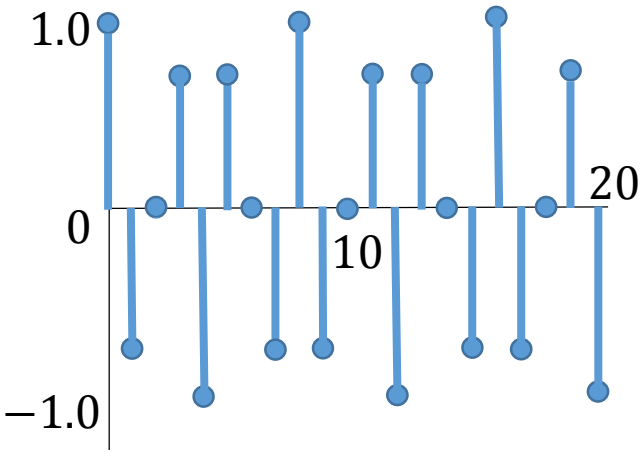
例　$x(k) = \cos \omega k$



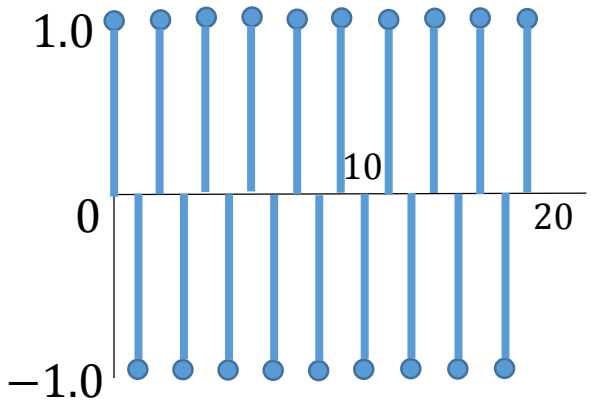
(a)　$\omega = 0$　　(b)　$\omega = 7\dfrac{\pi}{4}$　　(c)　$\omega = 3\dfrac{\pi}{2}$

7.1 離散時間信号

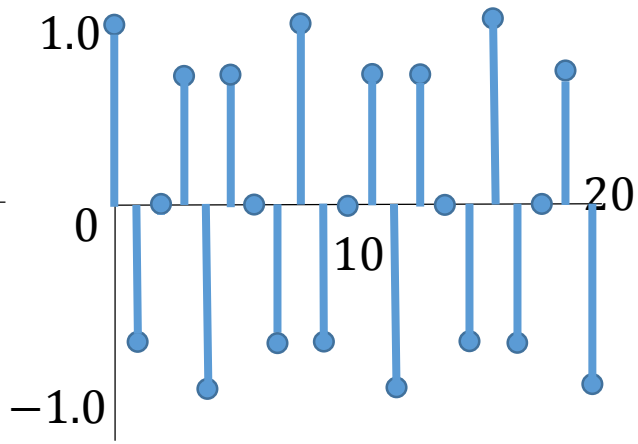
7.1.2　複素指数信号



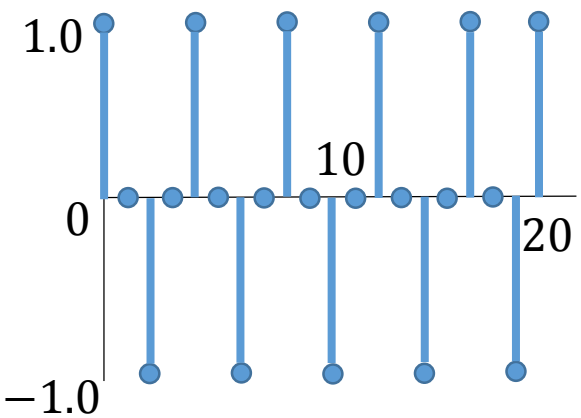
(d)　$\omega = 3\frac{\pi}{4}$



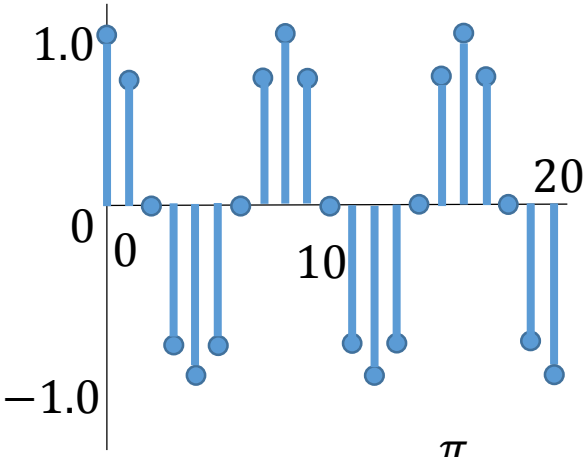
(e)　$\omega = 3\frac{\pi}{2}$



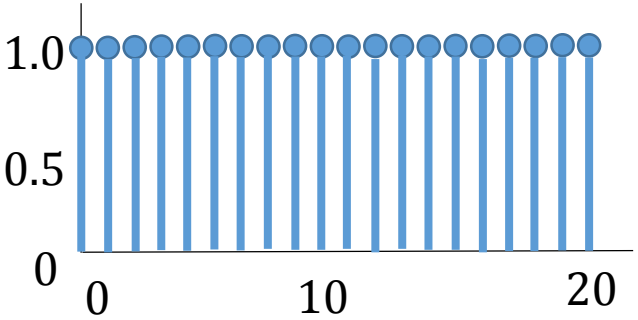
(f)　$\omega = 3\frac{\pi}{4}$



(g)　$\omega = 3\frac{\pi}{2}$



(h)　$\omega = 7\frac{\pi}{4}$



(i)　$\omega = 0$

7.1 離散時間信号

7.1.2　複素指数信号　(2)複素指数信号の周期性

$e^{j\omega_0 k}$が周期$N(>0)$の周期信号になるためには
以下の関係が成り立たなければならない.　　mは整数

$$e^{j\omega_0(k+N)} = e^{j\omega_0 k} \Leftrightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Leftrightarrow \omega_0 N = 2\pi m$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

離散時間複素指数信号　$x(k) = e^{j\omega_0 k}$　**の周期性**

離散時間複素指数信号 $e^{j\omega_0 k}$ は $\omega_0/2$ が有理数のときに限り
周期的になる

$$N = \frac{2\pi m}{\omega_0}$$

7.1 離散時間信号

7.1.2　複素指数信号　(2)複素指数信号の周期性

	連続時間複素指数信号 $e^{j\omega_0 t}$	**離散時間複素指数信号** $e^{j\omega_0 k}$
性質	異なるω_0に対して異なる信号になる	離れた周波数で同一の信号になる
周期性	任意のω_0に対して周期的になる	ある整数$N > 0$と，それと共通因子を持たない整数mに対して $\omega_0 = 2\pi m/N$ を満たすとき周期的になる
基本角周波数	ω_0	ω_0/m
基本周期	$2\pi/\omega_0$	$2\pi m/\omega_0$

調和関係にある離散時間複素指数信号

離散時間複素指数信号

$$\phi_n(k) = e^{j\frac{2\pi n}{N}k}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

を考える．連続時間と異なり，離散時間の場合には

$$\phi_{n+N}(k) = e^{j(n+N)\frac{2\pi}{N}k} = e^{j2\pi k} e^{j\frac{2\pi n}{N}k} = \phi_n(k)$$

という周期Nの周期性が存在するため，例えば

$$\{\phi_0(k), \phi_1(k), \cdots, \phi_{N-1}(k)\}$$

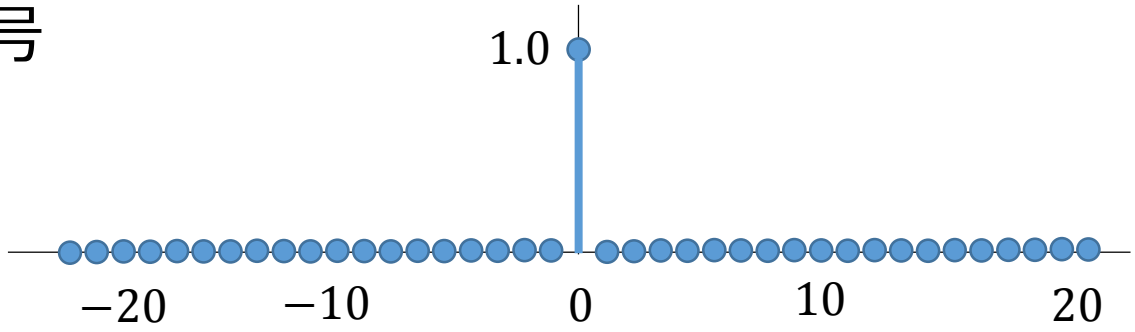
なるN個を考え，これを調和関係にある離散時間複素指数信号と呼ぶ.

7.1 離散時間信号

7.1.3　基本的な離散時間信号

（1）単位インパルス信号

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$



単位インパルス信号の性質

性質　1　単位インパルス信号は単位面積を持つ.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) = 1$$

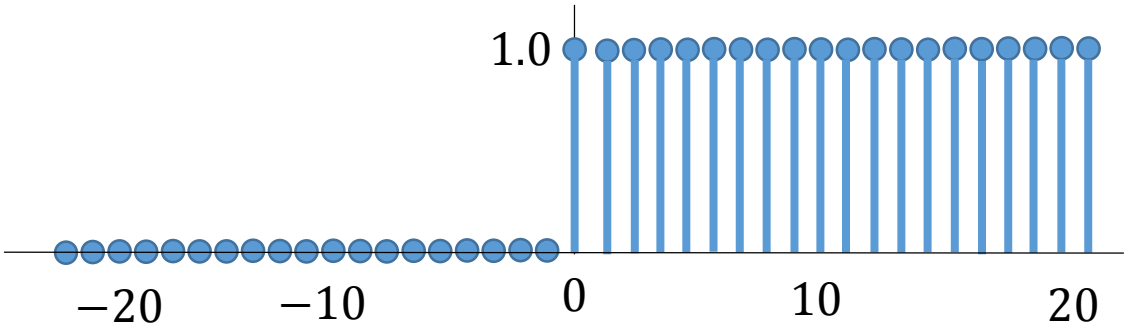
性質　2　任意の信号$x(k)$に対して次式が成り立つ.

$$x(k)\delta(k) = x(0)\delta(k)$$

$$x(k)\delta(k-n) = x(n)\delta(k-n)$$

（2）単位ステップ信号

$$u_s(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geqq 0 \end{cases}$$



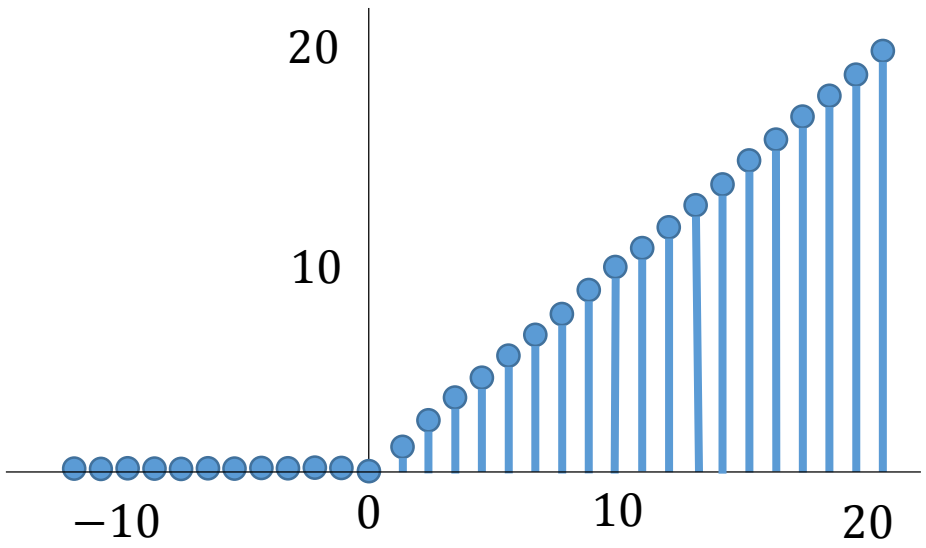
単位ステップ信号と単位インパルス信号の関係

$$\delta(k) = u_s(k) - u_s(k-1)$$

$$u_s(k) = \sum_{m=-\infty}^{k} \delta(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$$

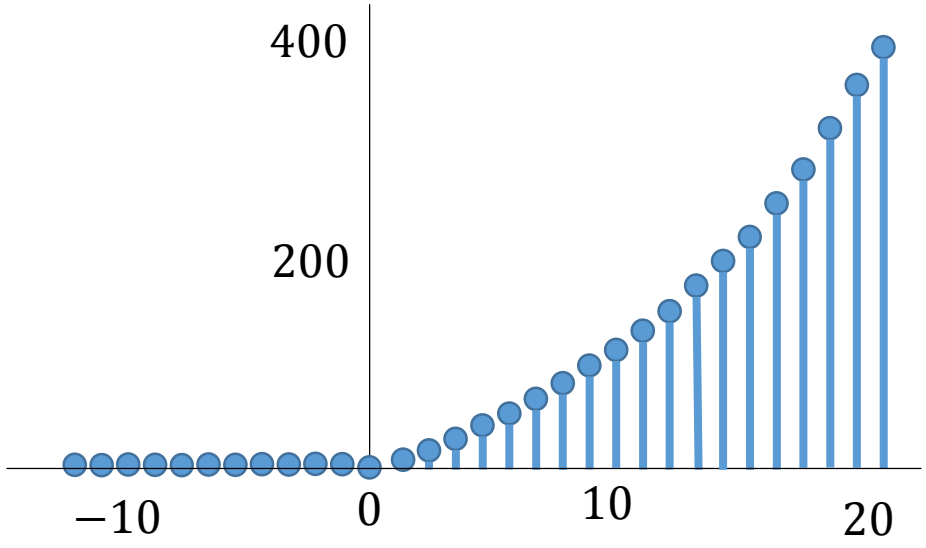
(3) 単位ランプ信号

$$r(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ k, & k \geqq 0 \end{cases}$$



単位加速度信号

$$a(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ k^2, & k \geqq 0 \end{cases}$$



離散時間信号の偶奇分解

任意の離散時間信号$x(k)$は
偶信号成分$x_e(k)$と奇信号成分の和に分解できる

$$x(k) = x_e(k) + x_o(k)$$

ここで

$$x_e(k) = \frac{1}{2}(x(k) + x(-k))$$

$$x_o(k) = \frac{1}{2}(x(k) - x(-k))$$

任意の離散時間信号$x(k)$は連続時間信号と同様に
操作を施すことができる。

信号の反転

時間軸推移

時間軸スケーリング