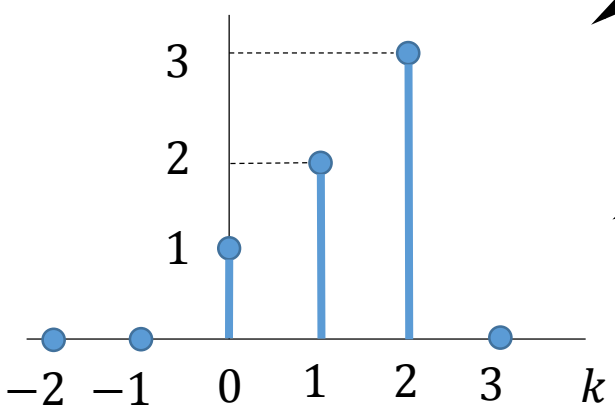
離散時間LTIシステム

Discrete-time LTI system

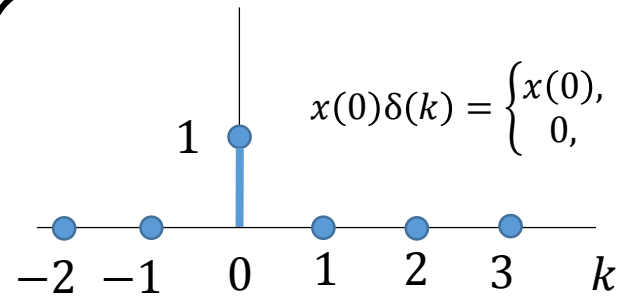
8.3 離散時間LTIシステム

8.3.1　離散時間信号の表現

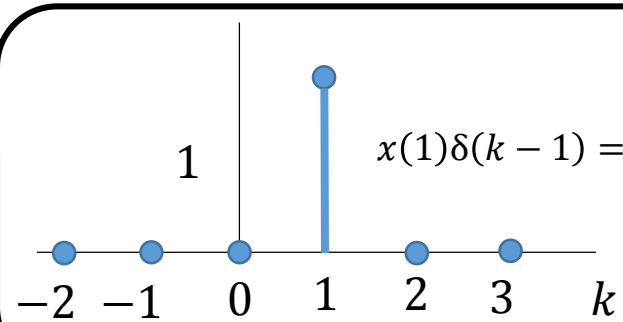
単位インパルス信号を用いた
離散時間信号の表現



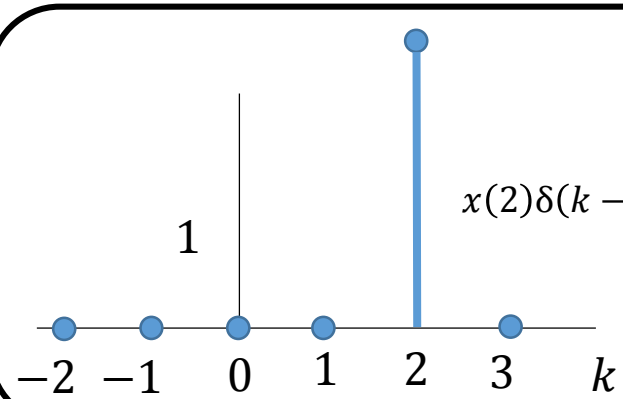
$$x(k) = x(0)\delta(k) + x(1)\delta(k-1) + x(2)\delta(k-2)$$



$$x(0)\delta(k) = \begin{cases} x(0), & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$



$$x(1)\delta(k-1) = \begin{cases} x(1), & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$



$$x(2)\delta(k-2) = \begin{cases} x(2), & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

8.3 離散時間LTIシステム

8.3.1　離散時間信号の表現

単位インパルス信号を用いた離散時間信号の表現（一般化）

もとの離散信号$x(k)$の分解表現

$$x(k) = \cdots + x(-2)\delta(k+2) + x(-1)\delta(k+1) + x(0)\delta(k)$$

$$+x(1)\delta(k-1) + x(2)\delta(k-2) + \cdots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

離散時間単位インパルス信号の<u>ふるい特性</u>

$x(k)$は時間軸推移された単位インパルス信号$\delta(k-n)$の線形結合で表現できる.

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

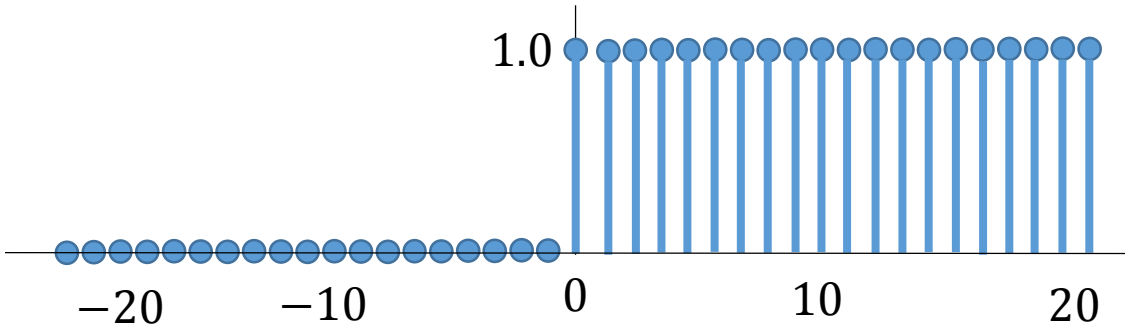
ここで線形結合の重みは$x(n)$である.

8.3 離散時間LTIシステム

8.3.1　離散時間信号の表現

単位ステップ信号は次のように表現できる.

$$u_s(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$$



8.3 離散時間LTIシステム

8.3.2　インパルス応答による離散時間LTIシステムの表現

信号 $x(k)$ を離散時間LTIシステムへ印加したときの応答 $y(k)$を考える.

線形システムを仮定：　重ね合わせの理から、それぞれの要素に対するシステムの応答を計算して総和をとることで $y(k)$を計算できる.

入力 $\delta(k-n)$ に対するシステムの応答を $h(k-n)$ とし，これをインパルス応答と呼ぶ.

システムは時不変

$$y(k) = \cdots + x(-2)h(k+2) + x(-1)h(h+1) + x(0)h(k)$$

$$+x(1)h(k-1) + x(2)h(k-2) + \cdots$$

入力$x(k)$に対する離散時間LTIシステムの出力

LSI（Linear shift-invariant; 線形シフト変換）

$$y(k) = \cdots + x(-2)h(k+2) + x(-1)h(h+1) + x(0)h(k)$$

$$+x(1)h(k-1) + x(2)h(k-2) + \cdots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n)$$

8.3 離散時間LTIシステム

8.3.2　インパルス応答による離散時間LTIシステムの表現

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n)$$

たたみ込み和（convolution sum）
もしくは　たたみ込み（convolution）

$$y(k) = x(k) * h(x) = h(k) * x(k)$$

と表現する

8.3 離散時間LTIシステム

8.3.2　インパルス応答による離散時間LTIシステムの表現

任意の離散時間LTIシステムは，そのインパルス応答によって一意的に特徴づけられる．

等比級数の和

初項a，公比rの等比数列$\{a, ar, ar^2, \cdots\}$の和は次のようになる．

(1) 有限数列の場合

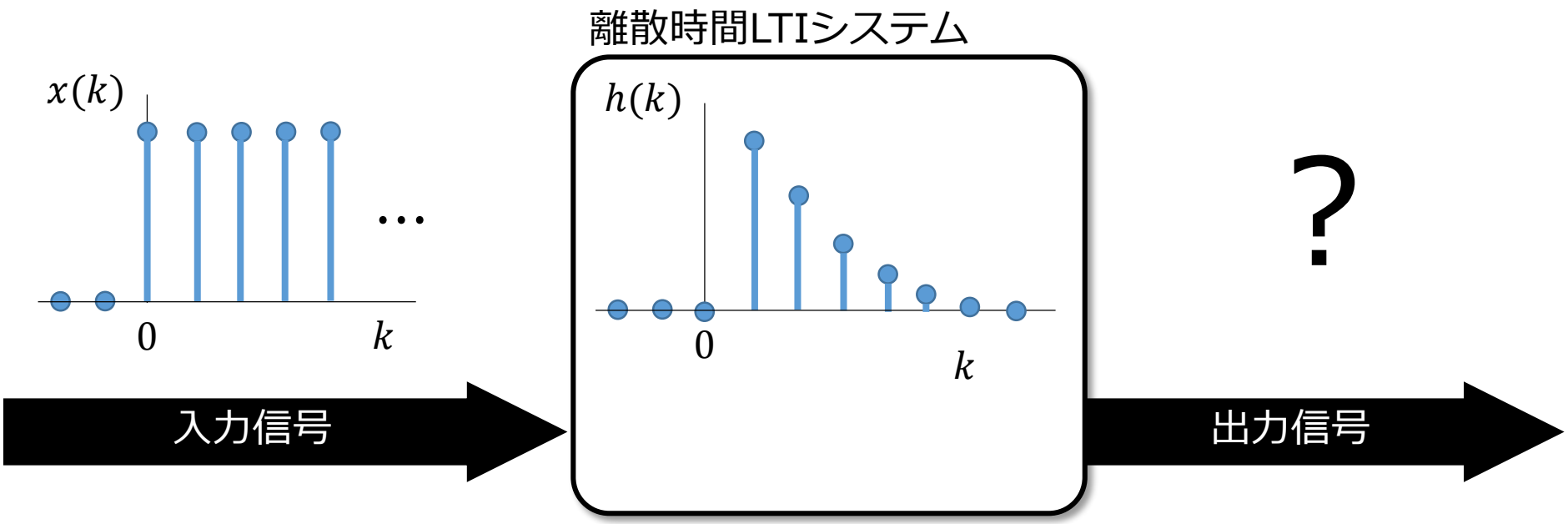
$$\sum_{n=0}^{N-1} ar^n = \frac{a(1-r^N)}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

(2) 無限数列の場合

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

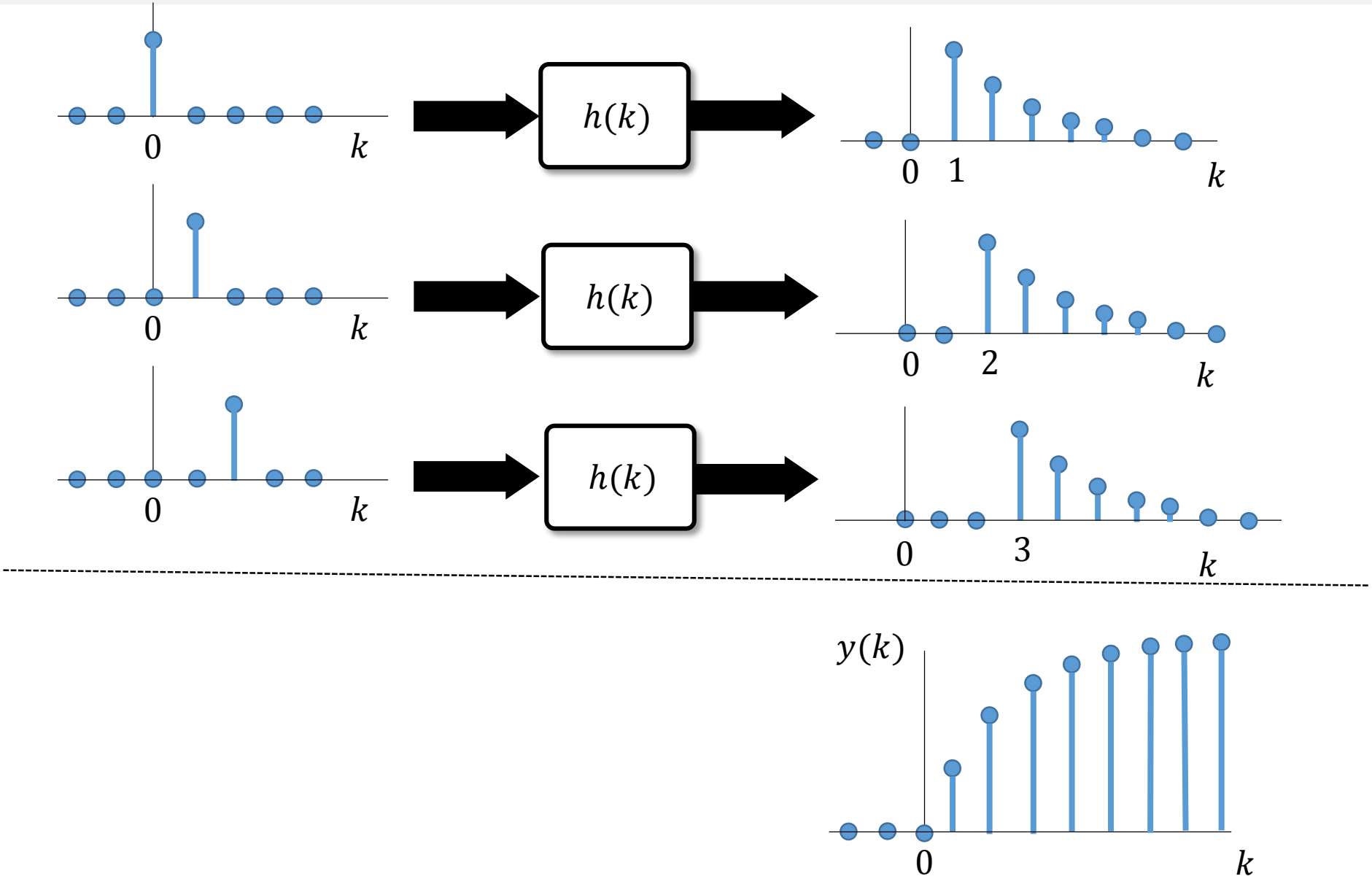
8.3 離散時間LTIシステム

8.3.2　インパルス応答による離散時間LTIシステムの表現



8.3 離散時間LTIシステム

8.3.2　インパルス応答による離散時間LTIシステムの表現



単位ステップ信号を入力としたときの応答を
単位ステップ応答という.

$$c(k) = h(k) * u_s(k)$$

$$c(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} h(n)$$

$$h(k) = c(k) - c(k-1)$$