z 変換

z transform

9.1 z 変換と収束領域

連続時間フーリエ変換 → 拡張 → ラプラス変換

定常解析

過渡状態の解析まで
行うことができる

離散時間フーリエ変換 → 拡張 → z 変換

定常解析

過渡状態の解析まで
行うことができる

z 変換は離散時間系に対するラプラス変換というイメージでOK

等比級数の和

初項a，公比rの等比数列$\{a, ar, ar^2, \cdots\}$の和は次のようになる．

(1) 有限数列の場合

$$\sum_{n=0}^{N-1} ar^n = \frac{a(1-r^N)}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

(2) 無限数列の場合

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

9.1 z 変換と収束領域

z 変換

離散時間信号$x(k)$の z 変換を$X(z)$とおいて，次式で定義する．

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

ただし z は複素変数である．

$x(k)$と$X(z)$は z 変換対と呼ばれる．

9.1 z 変換と収束領域

例題　つぎの離散時間信号の z 変換を求めよ.

$$x(k) = u_s(k)$$

$$X(z) = Z[u_s(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u_s(k) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

無限数列の和

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

例題　つぎの離散時間信号の z 変換を求めよ.

$$x(k) = \left(0.5^k + 0.25^k\right) u_s(k)$$

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(0.5^k + 0.25^k\right) u_s(k)\, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (0.5z^{-1})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (0.25z^{-1})^k = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.25z^{-1}}$$

$$= \frac{2 - 0.75z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})} = \frac{z(2z - 0.75)}{(z - 0.5)(z - 0.25)}$$

離散時間フーリエ変換

離散時間信号$x(k)$が絶対値総和可能，すなわち

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty$$

であるとき，$x(k)$の離散時間フーリエ変換は次式で与えられる．

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-jk\omega}$$

$X(\omega)$：$x(k)$のスペクトル（周波数ωの複素関数）

$|X(\omega)|$：振幅スペクトル

$\angle X(\omega)$：位相スペクトル

$|X(\omega)|^2$：振幅パワースペクトル

9.1 z 変換と収束領域

$z = e^{jk}$（ただしωは実数），すなわち大きさ1の複素変数に対しては以下が一致する．

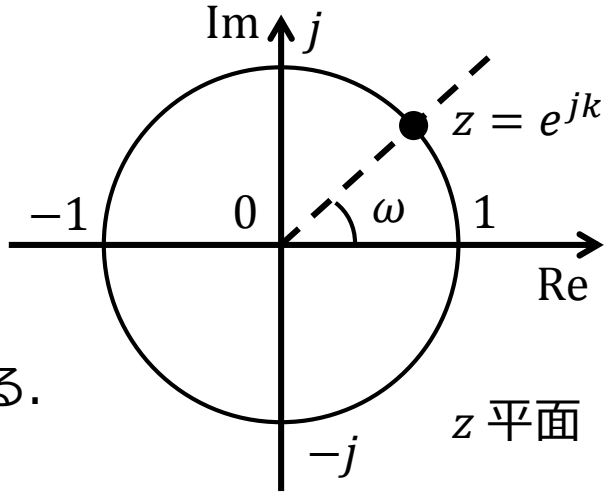
$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \qquad z \text{ 変数}$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-jk\omega} \qquad \text{離散時間フーリエ変数}$$

z 変換の意味

z 平面と呼ばれる複素平面内の$|z| = 1$という単位円上の z 変換は，離散時間フーリエ変換に一致する．

離散時間フーリエ変換は z 変換の特殊な場合である．



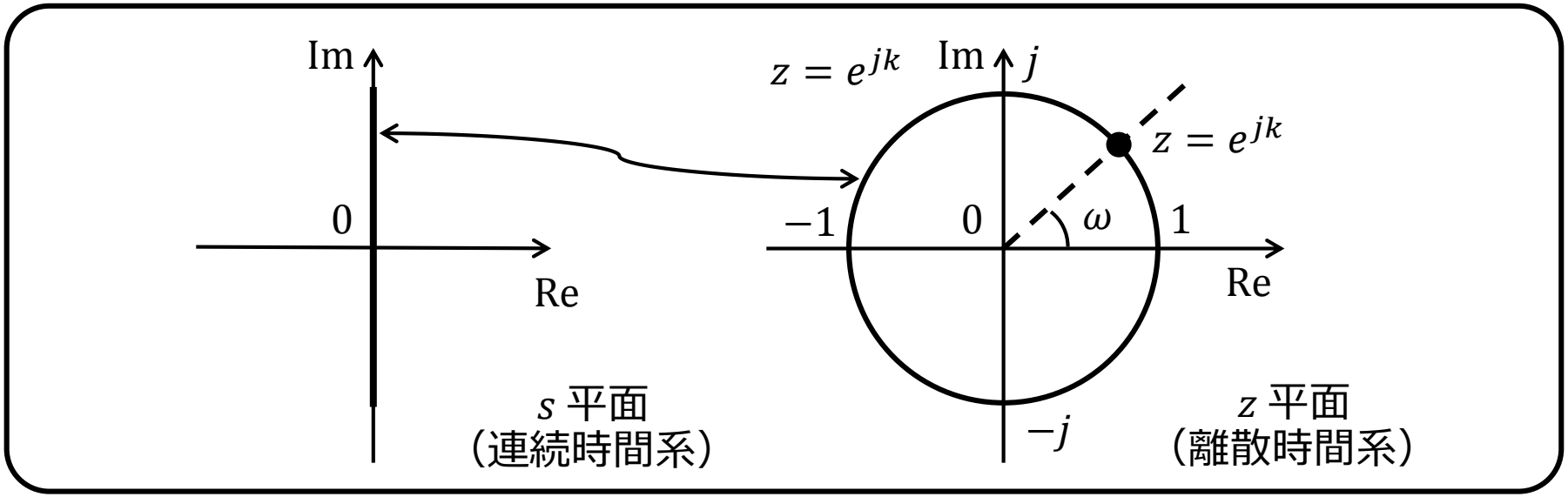
9.1 z 変換と収束領域

複素変数 z を極座標形式 $z = re^{jk}$ で表現し，これを z 変換の定義式に代入すると

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left(re^{j\omega}\right)^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{x(k)r^{-k}\}e^{-jk\omega}$$

したがって $X\left(re^{j\omega}\right)$ は離散時間信号 $x(k)$ に実指数 r^{-k} を乗じたものの離散時間フーリエ変換であることがわかる．

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \mathcal{F}[x(k)r^{-k}]$$



9.1 z 変換と収束領域

$$x(k) = a^k u_s(k)$$

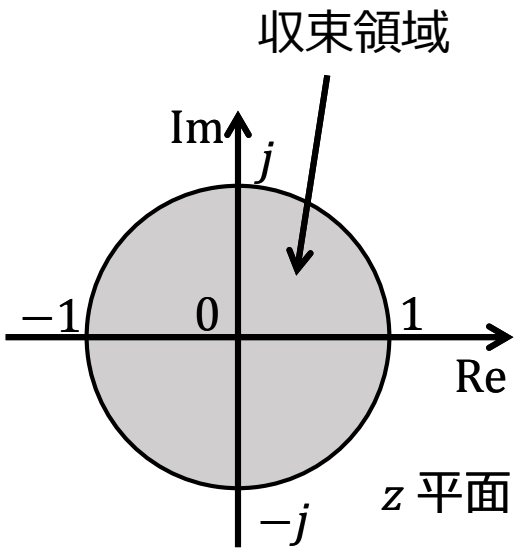
z 変換

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u_s(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$

初項 1，公比 az^{-1} の無限等比数列の和

$X(z)$の収束には，公比が1より小さくなければならない.

$|az^{-1}| < 1$



$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad |z| > |a|$$

9.1 z 変換と収束領域

$$X(z) = \sum_{k=N_1}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad \text{右側系列}$$

$k < 0$で0をとる右側系列を因果系列と呼ぶ.

因果系列について収束領域を考える.

9.1 z 変換と収束領域

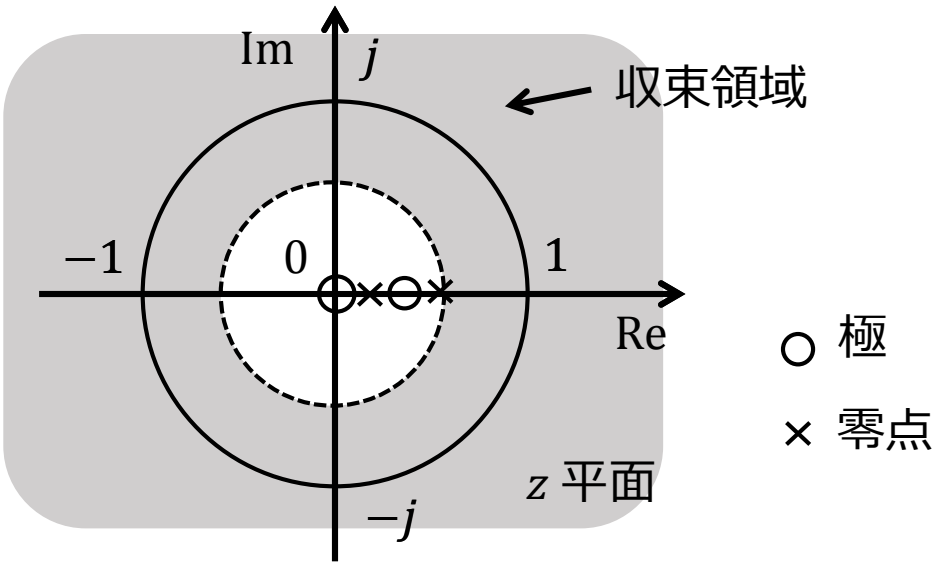
例題　つぎの離散時間信号の z 変換を求め，その収束領域を調べよ．

$$x(k) = \left(0.5^k + 0.25^k\right)u_s(k)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-0.25z^{-1}} = \frac{z(2z-0.75)}{(z-0.5)(z-0.25)}$$

収束領域は

$|0.5z^{-1}| < 1 \quad |0.25z^{-1}| < 1$ ⇒ $|z| > 0.5$



9.1 z変換と収束領域

	信号	$x(k)$	$X(z)$	収束領域
1	単位インパルス信号	$\delta(k)$	1	z 平面全体
2	単位ステップ信号	$u_s(k)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	時間軸推移	$\delta(k-m)$	z^{-m}	z 平面全体
4	減衰指数信号	$\alpha^k u_s(k)$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
5	ランプ信号	$k\alpha^k u^s(k)$	$\dfrac{1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
6	正弦波（１）	$\cos\omega_0 \cdot u_s(k)$	$\dfrac{1-\cos\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 \cdot z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
7	正弦波（２）	$\sin\omega_0 k \cdot u_s(k)$	$\dfrac{\sin\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 \cdot z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	減衰（増大）正弦波（1）	$r^k \cos\omega_0 k \cdot u_s(k)$	$\dfrac{1-r\cos\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 \cdot z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
9	減衰（増大）正弦波（２）	$r^k \sin\omega_0 k \cdot u_s(k)$	$\dfrac{r\sin\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2r\sin\omega_0 \cdot z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$