

離散時間非線形状態空間表現

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{b}v(k)$$

$$y(k) = h(\mathbf{x}(k)) + w(k)$$

$f(\cdot)$: ベクトル値をとる $\mathbf{x}(k)$ の非線形関数

$h(\cdot)$: スカラ値をとる $\mathbf{x}(k)$ の非線形関数

$v(k)$: システム雑音(平均値 0, 分散 $\sigma_v^2(k)$)

$w(k)$: 観測雑音(平均値 0, 分散 $\sigma_w^2(k)$)

システム雑音と観測雑音の項も
非線形関数に含めるのが一般的.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), v(k))$$

$$y(k) = h(\mathbf{x}(k), w(k))$$

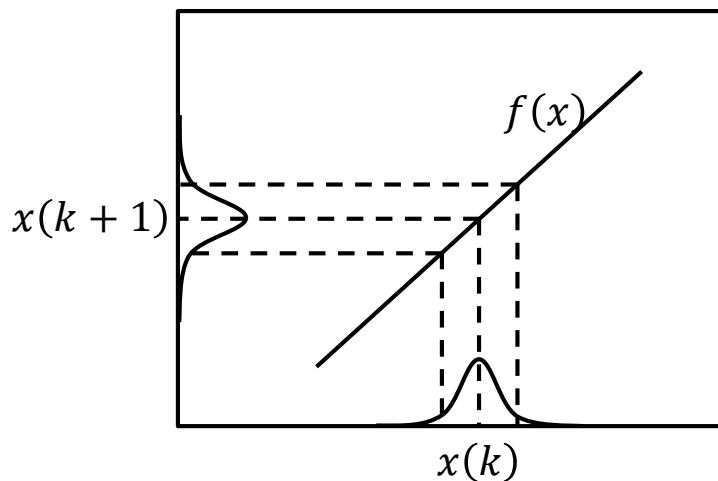
非線形カルマンフィルタ

確率分布を非線形変換すると、その分布の3次以上の高次モーメントが最初の二つのモーメントを変化させてしまう。

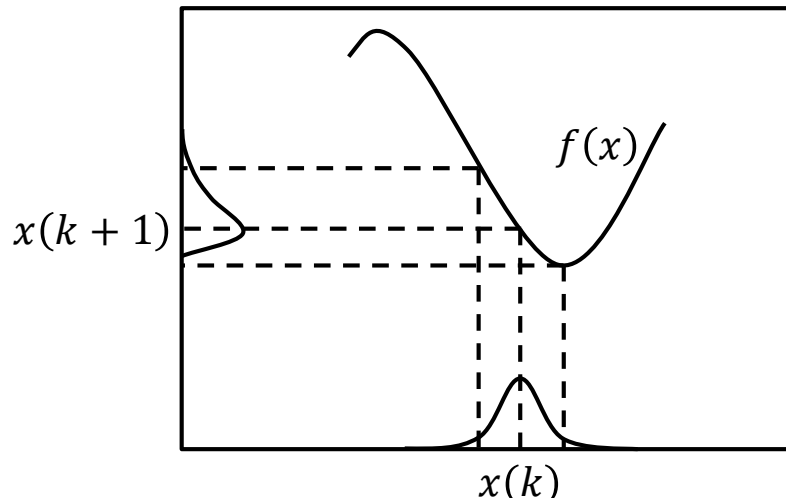
→非線形フィルタリングでは、平均値と共分散行列という二つのモーメントだけを用いて正確な状態推定を行うことができなくなる。

非線形カルマンフィルタにおける中心的な課題

1. 正規分布に従う確率変数が、曲線である非線形システムによってどのような分布に変換されるか
2. その分布からどのようにして状態推定値を計算するか



線形システムによる分布の変換(スカラシステム)



非線形システムによる分布の変換

代表的な近似法

線形化(EKF)

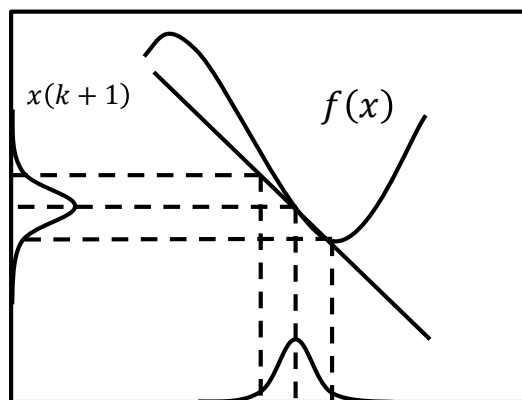
非線形関数のテイラー級数展開を偏微分(ヤコビアン)を用いて計算し級数を1次で打ち切る方法

統計的サンプリング法(UKF)

平均値 \hat{x} と共分散行列 P の非線形変換 $g(\cdot)$ を近似するために,

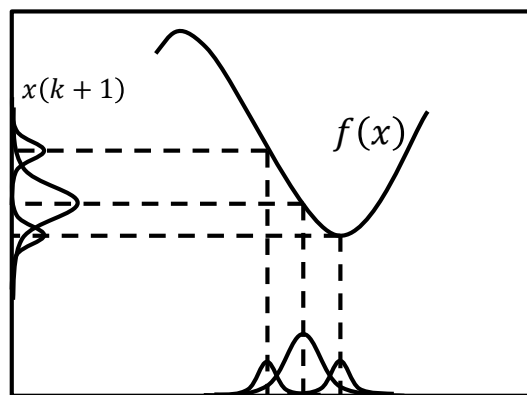
1. 元の空間でサンプル Ξ_i を選び,
2. それらを g で非線形変換して, $g(\Xi_i)$ を得て,
3. その $g(\Xi_i)$ に基づいて変換先での平均値と共分散行列を推定

方法	状態方程式	確率分布
線形カルマンフィルタ	線形	正規性
EKF (拡張カルマンフィルタ)	非線形	正規性
UKF (シグマポイントカルマンフィルタ)	非線形	正規性
パーティクルフィルタ	非線形	非正規性



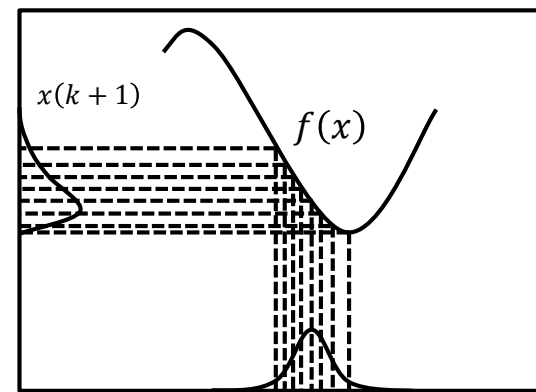
EKFの考え方

接線による曲線の直線化



UKFの考え方

小数個のサンプル点を用いて
分布を近似



モンテカルロ法の考え方

多数のサンプル点を用いて分
布を近似

拡張カルマンフィルタは,

1. 非線形システムを各時刻において線形化し,
2. それぞれの時刻において時変カルマンフィルタを適用するという考えに基づく(次の4段階).

1

時刻 $k, k + 1$ において, それぞれ事前状態推定値 $\hat{x}^-(k)$ が利用可能であるという仮定のもとで,

$$x(k + 1) = f(x(k)) + bv(k)$$

$$y(k) = h(x(k)) + w(k)$$

2

これらの非線形関数をテイラー一級数展開を用いて線形近似すると,

$$f(x(k)) = f(\hat{x}^-(k)) + A(k)(x(k) - \hat{x}^-(k))$$

$$h(x(k)) = h(\hat{x}^-(k)) + c^T(k)(x(k) - \hat{x}^-(k))$$

が得られる. ただし,

$$A(k) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}^-(k)} \quad c^T(k) = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}^-(k)}$$

3

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v(k) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}^-(k)) - \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T(k)\mathbf{x}(k) + w(k) + h(\hat{\mathbf{x}}^-(k)) - \mathbf{c}^T(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k)$$

$$\mathbf{u}(k) \triangleq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}^-(k)) - \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k)$$

$$z(k) \triangleq y(k) - h(\hat{\mathbf{x}}^-(k)) + \mathbf{c}^T(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k)$$

4

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v(k) + \mathbf{u}(k)$$

$$z(k) = \mathbf{c}^T(k)\mathbf{x}(k) + w(k)$$

非線形システムを線形化したものは、制御入力 $\mathbf{u}(k)$ を含んだ線形システムと同じ形式であることがわかる。
(ただし、係数行列 \mathbf{A} と係数ベクトル \mathbf{c} はともに時変)

初期設定

- ① 状態推定値の初期値 $\hat{\mathbf{x}}(0)$ は $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとする。

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = E[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{P}(0) = E[(\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)])(\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)])^T] = \Sigma_0$$

- ② システム雑音の分散 σ_v^2 と観測雑音の分散 σ_w^2 を設定する。

時間更新

- ① 予測ステップ

事前状態推定値: $\hat{\mathbf{x}}^-(k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k-1))$

線形近似: $\mathbf{A}(k-1) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k-1)}$ $\mathbf{c}^T(k-1) = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k-1)}$

事前誤差共分散行列: $\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T(k-1) + \sigma_v^2(k-1)\mathbf{b}\mathbf{b}^T$

- ② フィルタリングステップ

カルマンゲイン: $\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}(k)}{\mathbf{c}^T(k)\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}(k) + \sigma_w^2}$

状態推定値: $\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k) + \mathbf{g}(k)\{\mathbf{y}(k) - h(\hat{\mathbf{x}}^-(k))\}$

事後誤差共分散行列: $\mathbf{P}(k) = \{\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)\}\mathbf{P}^-(k)$

例題 7.1

スカラの非線形状態方程式に対するEKFを構成せよ.

$$x(k+1) = x(k) + 3 \cos \frac{x(k)}{10} + v(k)$$

$$y(k) = x^3(k) + w(k)$$

$$v(k) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$w(k) \sim \mathcal{N}(0,100)$$

$$x(0) = 10$$

$$\hat{x}(0) = 11$$

$$p(0) = 1$$

7.2 拡張カルマンフィルタ

$$f(x) \triangleq x + 3 \cos \frac{x}{10} \qquad h(x) \triangleq x^3$$

これらを $x(k)$ について偏微分すると

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 1 - \frac{3}{10} \sin \frac{x}{10} \qquad \frac{\partial h(x)}{\partial x} = 3x^2$$

これらを非線形カルマンフィルタのアルゴリズムに代入すると,

時間更新

① 予測ステップ

事前状態推定値: $\hat{x}^-(k) = \hat{x}(k-1) + 3 \cos \frac{\hat{x}(k-1)}{10}$

線形近似: $a(k-1) = 1 - \frac{3}{10} \sin \frac{\hat{x}^-(k)}{10} \quad c(k) = 3\{\hat{x}^-(k)\}^2$

事前誤差共分散行列: $p^-(k) = a^2(k-1)p(k-1) + 1$

② フィルタリングステップ

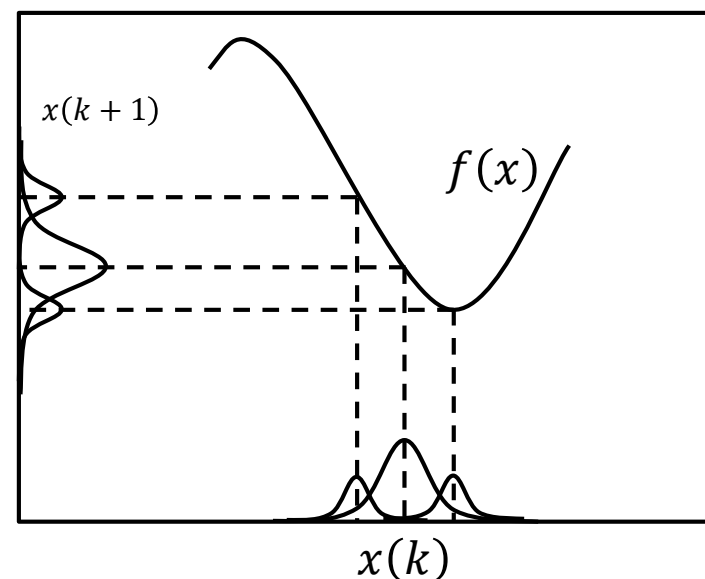
カルマンゲイン: $g(k) = \frac{p^-(k)c(k)}{c^2(k)p^-(k) + 100}$

状態推定値: $\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + g(k)[y(k) - \{\hat{x}^-(k)\}^3]$

事後誤差共分散行列: $p(k) = \{1 - g(k)c(k)\}p^-(k)$

UKFの特徴

- 非線形カルマンフィルタの一種
- 線形化を行わない
(EKFの問題点の一つを解決できる)



基本的な考え方

- 非線形システムの各時刻における線形近似ではなく、確率密度関数を正規分布で近似する。
- 標準偏差に対応するシグマポイント(σ 点)と呼ばれる少数個のサンプル点を選び、集合平均的に確率分布を近似する統計的サンプリング法の一つ。

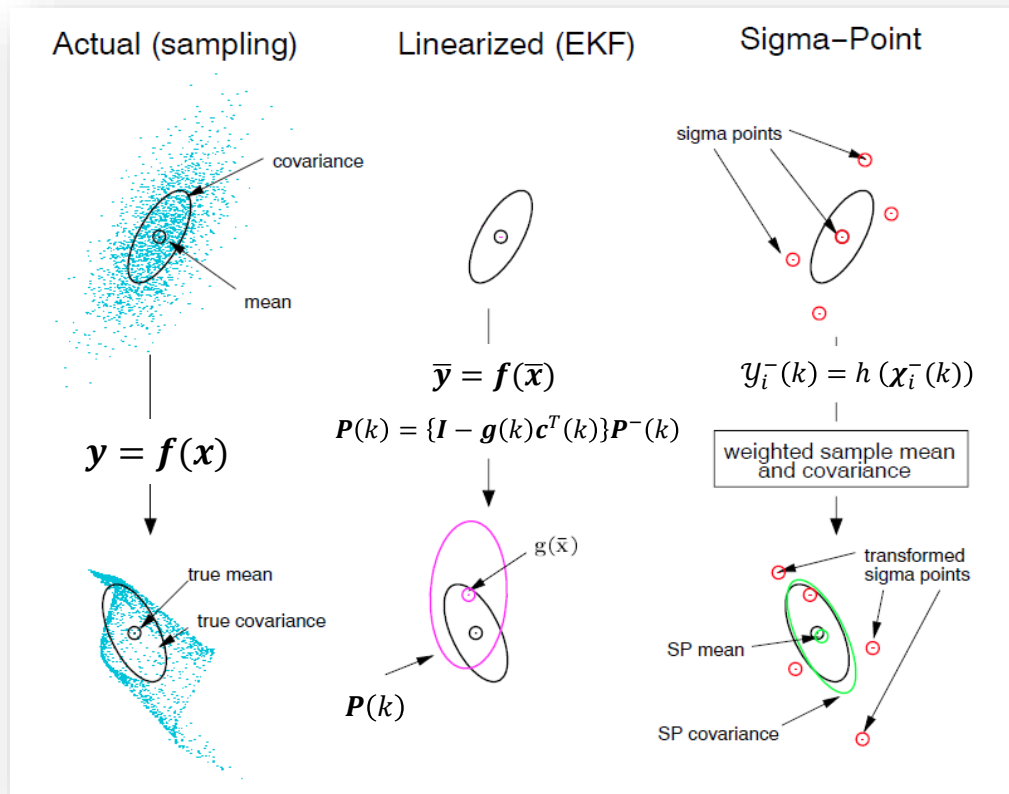
確率変数ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ を, ある非線形関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ によって, 確率ベクトル $y \in \mathbb{R}^n$ に変換する問題を考える.

$$y = f(x)$$

この変換(状態推移)で2次モーメント(分散)までの統計量を, 計算量を抑えて精度良く保存するにはどうすればよいか?

n 次元確率密度関数の形状を少数個のサンプル点で近似

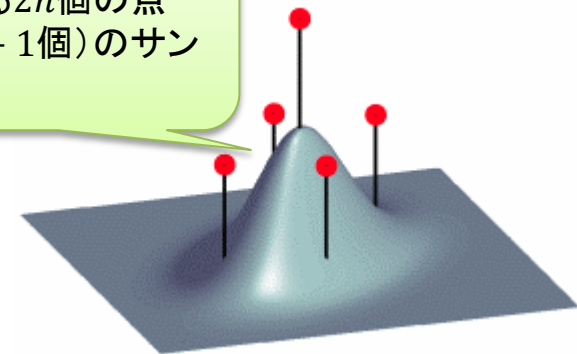
U変換の利用によるシグマポイントの算出



非線形カルマンフィルタ ～c. アンセンテッド(無香)カルマンフィルタ～

シグマポイント(sigma point)を用いて
 平均値 \bar{x} に関して対称にサンプリングを行う

χ_i は平均値と標準偏差
 に対応する $2n$ 個の点
 (合計 $2n + 1$ 個)のサン
 プルのこと



シグマポイント $\{\chi_i, i = 0, 1, 2, \dots, 2n\}$ の選び方

$$\chi_0 = \bar{x}$$

$$\chi_i = \bar{x} + \sqrt{n + \kappa}(\sqrt{P_x})_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\chi_{n+i} = \bar{x} - \sqrt{n + \kappa}(\sqrt{P_x})_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

κ スケーリングパラメータ
 (デフォルトは0)

$(\sqrt{P_x})_i$ 共分散行列 P_x の
 平方根行列の i 番目の列

シグマポイントの重み

$$w_0 = \frac{\kappa}{n + \kappa} \quad w_i = \frac{1}{2(n + \kappa)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

ただし $\sum_{i=0}^{2n} w_i = 1$

コレスキー分解(平方根行列を求める)

$n \times n$ 正定値対称行列 A は,

$$A = SS^T$$

のように分解することができ、これをコレスキー分解という。

行列 A が与えられたとき、右のアルゴリズムによって、平方根行列 S を求めることができる。

for $i = 1, \dots, n$

$$S_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij}^2}$$

for $j = 1, \dots, n$

$$S_{ji} = \begin{cases} 0, & j < i \\ \frac{1}{S_{ii}} \left(A_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{jk} S_{ik} \right), & j \geq i \end{cases}$$

next j

next i

コレスキー分解の他に、

- UD分解 (UD factorization)
- 特異値分解 (SVD: Singular Value Decomposition)

などがある。これらの行列分解を共分散行列に適用することによって、カルマンフィルタの数値的安定性を向上させることができる。

初期設定

状態推定値の初期値 $\hat{\mathbf{x}}(0)$ は, $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, \Sigma_0)$ に従う正規性確率ベクトルとすると,

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = E[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{P}(0) = E[(\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)])(\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)])^T] = \Sigma_0$$

時間更新

① シグマポイントの計算

1-1

1時刻前に得られた状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ と共分散行列 $\mathbf{P}(k-1)$ を用いて, $2n-1$ 個のシグマポイントを計算

$$\mathbf{x}_0(k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k-1)$$

$$\mathbf{x}_i(k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \sqrt{n+\kappa}(\sqrt{\mathbf{P}(k-1)})_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{x}_{n+i}(k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) - \sqrt{n+\kappa}(\sqrt{\mathbf{P}(k-1)})_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

1-2

また, 重みを次のように計算する.

$$w_0 = \frac{\kappa}{n+\kappa} \quad w_i = \frac{1}{2(n+\kappa)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad \text{ただし} \quad \sum_{i=0}^{2n} w_i = 1$$

時間更新

② 予測ステップ

2-1 シグマポイントの更新:

$$\chi_i^-(k) = f(\chi_i(k-1)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2-2 事前状態推定値:

$$\hat{\mathbf{x}}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i \chi_i^-(k)$$

2-3 事前誤差共分散行列:

$$\mathbf{P}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i \{\chi_i^-(k) - \hat{\mathbf{x}}^-(k)\} \{\chi_i^-(k) - \hat{\mathbf{x}}^-(k)\}^T + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T$$

時間更新

2-4 シグマポイントの再計算:

$$\chi_0(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k)$$

$$\chi_i^-(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k) + \sqrt{n + \kappa} \left(\sqrt{\mathbf{P}^-(k)} \right)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\chi_{n+i}^-(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k) - \sqrt{n + \kappa} \left(\sqrt{\mathbf{P}^-(k)} \right)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2-5 出力のシグマポイントの計算:

$$\mathbf{y}_i^-(k) = h(\chi_i^-(k)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2-6 事前出力値の計算:

$$\hat{\mathbf{y}}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{y}_i^-$$

2-7 事前出力誤差共分散行列:

$$\mathbf{P}_{yy}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i \{ \mathbf{y}_i^-(k) - \hat{\mathbf{y}}^-(k) \}^2$$

時間更新

2-8 事前状態・出力誤差共分散行列:

$$\mathbf{P}_{xy}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i \{\boldsymbol{\chi}_i^-(k) - \hat{\boldsymbol{x}}^-(k)\} \{\mathbf{y}_i^-(k) - \hat{\mathbf{y}}^-(k)\}$$

2-9 カルマンゲイン

$$\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}_{xy}^-(k)}{P_{yy}^-(k) + \sigma_w^2}$$

③ フィルタリングステップ

3-1 状態推定値:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}^-(k) + \mathbf{g}(k) \{y(k) - \hat{\mathbf{y}}^-(k)\}$$

3-2 事後誤差共分散行列:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}^-(k) - \mathbf{g}(k) (\mathbf{P}_{xy}^-(k))^T$$

Central Difference KF (CDKF)

M. Norgaard, N. Poulsen, and O. Ravn, “New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems,” *Automatica*, vol. 36, pp. 1627–1638, November 2000.

Square-Root UKF (SRUKF)

R. van der Merwe and E. Wan, “Efficient Derivative-Free Kalman Filters for Online Learning,” in *Proceedings of the 9th European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN)*, (Bruges, Belgium), pp. 205–210, Apr 2001.

Square-Root CDKF (SRCDKF)

R. van der Merwe and E. Wan, “The Square-Root Unscented Kalman Filter for State- and Parameter-Estimation,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 6, (Salt Lake City, UT), pp. 3461–3464, May 2001.